

О.Ю.МАСЮТКА, О.М.РАДЧЕНКО

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

**Лінійні рівняння та лінійні
системи**

Київ – 2026

УДК 517 (075.8)
М 89

Рецензенти: *Бех І.І., кандидат фіз-мат. наук, доцент*
Єфіменко С.В., кандидат фіз-мат. наук, доцент

Рекомендовано до публікації вченою радою
факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
(протокол № 10 від 29 травня 2026 року)

О.Ю. Масютка, О.М. Радченко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. Лінійні рівняння та лінійні системи
К., 2026 – 50 с.

Навчальний посібник для студентів 2 курсу спеціальності G5 факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем при вивченні курсу "Вища математика"

Навчальне видання

Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничого пакету $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ

Формат 60 × 84/16. Друк офсетний. Гарнітура Тетрого-TLF.
Зам.03-1016. Умовн. друк. арк. 3,5.

© О.Ю. Масютка, О.М. Радченко, 2026
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2026

Зміст

1	ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ	4
1.1	Лінійні рівняння з сталими коефіцієнтами	5
1.2	Рівняння Ейлера	10
1.3	Метод Лагранжа (метод варіації сталих)	15
2	ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ	18
2.1	Лінійні однорідні системи	18
2.2	Лінійні неоднорідні системи	27
2.3	Метод Лагранжа (варіації сталих) для лінійних систем	41

Розділ 1

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння виду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

тобто рівняння для функції $y(x)$ однієї змінної, яке крім самої функції містить також її похідні. Найвищий порядок похідної в диференціальному рівнянні називають *порядком* цього рівняння, тобто рівняння (1.1) — це *рівняння n -го порядку*.

Приклад 1.1. Розглянемо рівняння $y' = \lambda y$. Нехай $y \neq 0$, тоді внаслідок рівності $y'/y = (\ln |y|)'$ наше рівняння набуває виду $(\ln |y|)' = \lambda$. Відповідно $\ln |y| = \lambda x + C_1$, звідки $y(x) = \pm e^{\lambda x + C_1} = \pm e^{C_1} e^{\lambda x} = C e^{\lambda x}$, де $C = \pm e^{C_1}$ є довільною ненульовою сталою. При $C = 0$ рівність $y(x) = C e^{\lambda x}$ має вид $y(x) = 0$, що є очевидним розв'язком нашого рівняння. Отже, загальний розв'язок рівняння $y' = \lambda y$ має вид $y(x) = C e^{\lambda x}$, де C є довільною сталою.

Отже, при $\lambda > 0$ маємо зростання за законом $e^{\lambda x}$, яке називають експоненціальним зростанням. Прикладом є збільшення будь-якої біологічної популяції за умови достатніх ресурсів та відсутності обмежень. Відповідно при $\lambda < 0$ маємо експоненціальне спадання, прикладом чого є закон розпаду будь-якої радіоактивної речовини.

Важливим типом диференціальних рівнянь 1-го порядку є рівняння $y' + f(x)y = g(x)$. Оскільки $L(y) = y' + f(x)y$ є лінійною функцією від y , то це рівняння є лінійним. Як відомо з лінійної алгебри, загальний розв'язок лінійного рівняння є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $L(y) = y' + f(x)y = 0$ та будь-якого частинного розв'язку цього рівняння. Оскільки метод розв'язування цього однорідного рівняння в нас вже є, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y' + f(x)y = g(x)$ завжди можна знайти методом варіації довільної сталої.

Приклад 1.2. Розглянемо рівняння $y' - \lambda y = e^{\lambda_1 x}$. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $y(x) = C e^{\lambda x}$, де C

є довільною сталою. Метод варіації довільної сталої полягає в тому, що після цього розв'язок нашого неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y(x) = c(x)e^{\lambda x}$, де $c(x)$ є певною функцією.

Оскільки $y' = c'(x)e^{\lambda x} + c(x)\lambda e^{\lambda x}$, то $y' - \lambda y = c'(x)e^{\lambda x} + c(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda c(x)e^{\lambda x} = c'(x)e^{\lambda x}$, звідки $c'(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda_1 x}$.

Нехай $\lambda_1 \neq \lambda$. Тоді $c'(x) = e^{(\lambda_1 - \lambda)x}$, $c(x) = e^{(\lambda_1 - \lambda)x} / (\lambda_1 - \lambda) + C$ та $y(x) = c(x)e^{\lambda x} = e^{\lambda_1 x} / (\lambda_1 - \lambda) + Ce^{\lambda x}$. В цій сумі перший доданок є частинним розв'язком нашого неоднорідного рівняння, а $Ce^{\lambda x}$ — загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

Нехай тепер $\lambda_1 = \lambda$. Тоді $c'(x) = 1$, $c(x) = x + C$ та $y(x) = c(x)e^{\lambda x} = xe^{\lambda x} + Ce^{\lambda x}$. В цій сумі доданок $xe^{\lambda x}$ також є частинним розв'язком нашого неоднорідного рівняння, а $Ce^{\lambda x}$ — загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння.

1.1. Лінійні рівняння з сталими коефіцієнтами

Оскільки $L(y) = a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$ є лінійною функцією від y , то рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1.2)$$

є лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку. Як вже було зауважено, загальний розв'язок лінійного рівняння завжди є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього рівняння.

Для лінійного диференціального рівняння n -го порядку загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вид

$$y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

де $y_1(x), \dots, y_n(x)$ є лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння (їх називають *фундаментальною системою розв'язків*).

В багатьох важливих випадках коефіцієнти рівняння (1.2) не залежать від змінної x , тобто воно набуває виду

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \quad (1.3)$$

Це рівняння називають *лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку з сталими коефіцієнтами*. В цьому випадку фундаментальні

розв'язки однорідного рівняння шукають у вигляді $y = e^{\lambda x}$. Якщо підставити $e^{\lambda x}$ в наше однорідне рівняння, то отримаємо рівняння

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (1.4)$$

яке називають *характеристичним рівнянням* для рівняння (1.3).

Відповідно до типу коренів цього рівняння маємо такі випадки.
Перший випадок. Всі n коренів $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні та різні. Тоді фундаментальна система розв'язків має вид

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}.$$

Другий випадок. Дійсний корінь λ має кратність m . Тоді цей корінь породжує таку групу фундаментальних розв'язків:

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

Третій випадок. Серед коренів характеристичного рівняння є пара спряжених комплексних розв'язків $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратності m . Тоді до фундаментальної системи розв'язків увійдуть такі:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Розглянемо конкретні приклади лінійних однорідних рівнянь.

Приклад 1.3. Розв'яжемо рівняння $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Розв'язками характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ є $\lambda_1 = -3$ та $\lambda_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}.$$

Приклад 1.4. Розв'яжемо рівняння $4y'' + 4y' + y = 0$.

Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ є $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/2$, то загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{-x/2} + c_2 x e^{-x/2} = e^{-x/2} (c_1 + c_2 x).$$

Приклад 1.5. Розв'яжемо рівняння $y'' + 4y = 0$.

Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ є $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, то загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Приклад 1.6. Розв'яжемо рівняння $y''' - 8y = 0$.

Оскільки розв'язками характеристичного рівняння

$$\lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

є $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$, то загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x).$$

Приклад 1.7. Розв'яжемо рівняння $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

Оскільки розв'язками характеристичного рівняння

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^3(\lambda - 3)^2 = 0$$

є $\lambda_{1,2,3} = 0$ та $\lambda_{4,5} = 3$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{3x} + c_5 x e^{3x} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + e^{3x}(c_4 + c_5 x).$$

Приклад 1.8. Розв'яжемо рівняння $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$ є $\lambda_{1,2} = i$ та $\lambda_{3,4} = -i$, то фундаментальною системою розв'язків диференціального рівняння є $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$, $x \sin x$, а загальним розв'язком рівняння є $y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x$.

Тепер для лінійних рівнянь з сталими коефіцієнтами перейдемо до *неоднорідних* рівнянь, тобто до рівнянь виду (1.3). Оскільки алгоритм знаходження загального розв'язку однорідних рівнянь вже є, то залишилося знаходити *частинні розв'язки* неоднорідних рівнянь.

Розпочнемо з випадків, коли частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна вгадати. Нехай права частина рівняння має вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x (p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_1 x + p_0) + e^{\alpha x} \sin \beta x (q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \dots + q_1 x + q_0).$$

Такий вираз називають *квазіполіномом з контрольним числом* $\alpha + i\beta$. Якщо контрольне число не співпадає з жодним коренем характеристичного рівняння, то частинним розв'язком буде *квазіполіном аналогічного вигляду*, тобто

$$y_u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x (P_m x^m + P_{m-1} x^{m-1} + \dots + P_1 x + P_0) + e^{\alpha x} \sin \beta x (Q_m x^m + Q_{m-1} x^{m-1} + \dots + Q_1 x + Q_0).$$

Залишається підставити цей вираз в рівняння (1.3), порівняти коефіцієнти аналогічних доданків та отримати значення всіх P та Q .

Якщо контрольне число є коренем характеристичного рівняння кратності r , то частинний розв'язок має вигляд

$$y_u(x) = x^r e^{\alpha x} \cos \beta x (P_m x^m + P_{m-1} x^{m-1} + \dots + P_1 x + P_0) + x^r e^{\alpha x} \sin \beta x (Q_m x^m + Q_{m-1} x^{m-1} + \dots + Q_1 x + Q_0).$$

Важливою властивістю будь-якого лінійного рівняння $L(y) = f$ є наступна: якщо $f = f_1 + \dots + f_m$, а y_k є розв'язком рівняння $L(y) = f_k$, то $y = y_1 + \dots + y_m$ є розв'язком рівняння $L(y) = f$. Справді, оскільки $L(y_k) = f_k$, то внаслідок лінійності функції $L(\cdot)$ маємо $L(y_1 + \dots + y_m) = L(y_1) + \dots + L(y_m) = f_1 + \dots + f_m$. Цю властивість називають *принципом суперпозиції*.

Відповідно якщо права частина рівняння (1.3) є сумою $f(x) = f_1(x) + \dots + f_m(x)$ декількох квазіполіномів різного типу, то частинний розв'язок цього рівняння є сумою $y_{1u} + \dots + y_{mu}$, де y_{ku} є частинним розв'язком рівняння $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f_k(x)$.

Приклад 1.9. Розв'яжемо рівняння $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, його коренями $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 3$, тож загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$.

Права частина нашого рівняння є квазіполіномом виду $a e^{4x}$, контрольне число $\alpha + i\beta = 4 + 0i$ якого не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вид $y = A e^{4x}$, звідки $y'' - 2y' - 3y = 16A e^{4x} - 8A e^{4x} - 3A e^{4x} = 5A e^{4x}$. Тепер з рівності $5A e^{4x} = e^{4x}$ отримуємо $A = 1/5$, звідки частинним розв'язком нашого рівняння є $y_u = e^{4x}/5$, а загальним розв'язком $y = y_0 + y_u = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + e^{4x}/5$.

Приклад 1.10. Розв'яжемо рівняння $y'' + y = 4xe^x$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 + 1 = 0$, його коренями $\lambda_{1,2} = \pm i$, тож загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Права частина нашого рівняння є квазіполіномом виду $(ax + b)e^x$, контрольне число $\alpha + i\beta = 1 + 0i$ якого не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вид $y = (Ax + B)e^x$, звідки $y'' + y = (2Ax + 2A + 2B)e^x$. Тепер з рівності $(2Ax + 2A + 2B)e^x = 4xe^x$ отримуємо $2Ax + 2A + 2B = 4x$, звідки $2Ax = 4x$ та $2A + 2B = 0$, а тому $A = 2$ та $B = -2$. Отже, частинним розв'язком нашого рівняння є $y_c = (2x - 2)e^x$, а загальним розв'язком $y = y_0 + y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (2x - 2)e^x$.

Приклад 1.11. Розв'яжемо рівняння $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 - 1 = 0$, його коренями $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 1$, тож загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.

Права частина нашого рівняння є сумою двох доданків різного виду, тому окремо знайдемо частинні розв'язки рівнянь $y'' - y = 2e^x$ та $y'' - y = -x^2$. Права частина першого рівняння має вид ae^x , контрольне число $\alpha + i\beta = 1 + 0i = 1$ якого співпадає з другим коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок цього рівняння має вид $y = Axe^x$, звідки $y'' - y = 2Ae^x$. Тепер з рівності $2Ae^{4x} = 2e^{4x}$ отримуємо $A = 1$, звідки частинним розв'язком першого рівняння є $y_{1c} = xe^x$.

Права частина другого рівняння має вид $(ax^2 + bx + c)e^0$, контрольне число $\alpha + i\beta = 0 + 0i$ якого не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок цього рівняння має вид $y = Ax^2 + Bx + C$, звідки $y'' - y = -Ax^2 - Bx - C + 2A$. Тепер з рівності $-Ax^2 - Bx - C + 2A = -x^2$ отримуємо $A = 1$, $B = 0$ та $C = 2$, звідки частинним розв'язком другого рівняння є $y_{2c} = x^2 + 2$.

Отже, частинним розв'язком нашого початкового рівняння є $y_c = y_{1c} + y_{2c} = xe^x + x^2 + 2$, а його загальним розв'язком $y = y_0 + y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + xe^x + x^2 + 2$.

Приклад 1.12. Розв'яжемо рівняння $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, його коренями $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 2$, тож загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Права частина нашого рівняння має вид $e^0(a \cos x + b \sin x)$ з комплексним контрольним числом $\alpha + i\beta = 0 + 1i$, яке не співпадає

з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вид $y = A \cos x + B \sin x$, звідки $y'' - 3y' + 2y = (A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x$. Тепер з рівності $(A - 3B) \cos x + (3A + B) \sin x = \sin x$ отримуємо $A - 3B = 0$, $3A + B = 1$, звідки $A = 0,3$, $B = 0,1$, частинним розв'язком нашого рівняння є $y_u = 0,3 \cos x + 0,1 \sin x$, а загальним розв'язком $y = y_0 + y_u = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 0,3 \cos x + 0,1 \sin x$.

Приклад 1.13. Розв'яжемо рівняння $y'' + y = 4 \sin x$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 + 1 = 0$, його коренями $\lambda_{1,2} = \pm i$, тому загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Права частина нашого рівняння має вид $e^0(a \cos x + b \sin x)$ з комплексним контрольним числом $\alpha + i\beta = 0 + 1i = i$, яке співпадає з коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вид $y = x(A \cos x + B \sin x)$, звідки $y'' + y = 2B \cos x - 2A \sin x$. Тепер з рівності $2B \cos x - 2A \sin x = 4 \sin x$ отримуємо $A = -2$, $B = 0$, звідки частинним розв'язком нашого рівняння є $y_u = -2x \cos x$, а загальним розв'язком $y = y_0 + y_u = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2x \cos x$.

Приклад 1.14. Розв'яжемо рівняння $y'' - 2y' + y = 6x e^x$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, його коренями $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, тож загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 e^x + c_2 x e^x = e^x(c_1 + c_2 x)$.

Права частина нашого рівняння є квазіполіномом виду $(ax + b)e^x$, контрольне число $\alpha + i\beta = 1 + 0i = 1$ якого співпадає з коренем кратності 2 нашого характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок має вид $y = x^2(Ax + B)e^x$, звідки $y'' - 2y' + y = (6Ax + 2B)e^x$. Тепер з рівності $(6Ax + 2B)e^x = 6x e^x$ отримуємо $A = 1$, $B = 0$, звідки частинним розв'язком нашого рівняння є $y_u = x^3 e^x$, а загальним розв'язком $y = y_0 + y_u = e^x(c_1 + c_2 x) + x^3 e^x$.

1.2. Рівняння Ейлера

Рівнянням Ейлера називають рівняння

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \quad (1.5)$$

де коефіцієнти a_k є сталими. Заміною $x = \pm e^t$ (звідки $t = \ln |x|$) воно перетворюється на лінійне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 1.15. В диференціальному рівнянні $x^2 y'' + x y' + y = 0$ зробимо заміну $x = e^t$. При цьому $y(t)$ є композицією функцій $y(x)$ та $x = e^t$, звідки $y'(t) = y'(x) e^t$. Для подальшого останню рівність зручно подати в операторному вигляді $d/dx = e^{-t} d/dt$. Звідси

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{d}{dt} \right) = e^{-t} \left(-e^{-t} \frac{d}{dt} + e^{-t} \frac{d^2}{dt^2} \right),$$

або $y''(x) = e^{-2t}(y''(t) - y'(t))$. Підставивши вирази для $y''(x)$ та $y'(x)$ в початкове рівняння, для $y(t)$ отримаємо $y'' + y = 0$, тобто лінійне рівняння з сталими коефіцієнтами та загальним розв'язком $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Тому загальним розв'язком нашого початкового рівняння є $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$.

При $x < 0$ робимо заміну $x = -e^t$. В результаті для $y(t)$ маємо таке саме рівняння $y'' + y = 0$ з розв'язком $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Підставивши сюди $t = \ln(-x) = \ln|x|$ отримуємо загальний розв'язок нашого початкового рівняння $y(x) = C_1 \cos(\ln|x|) + C_2 \sin(\ln|x|)$.

Розпочнемо з однорідного рівняння

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0. \quad (1.6)$$

З практичного погляду замість заміни змінної розв'язки цього рівняння зручніше шукати у вигляді $y = |x|^\lambda$. Після підстановки цього виразу в рівняння (1.6) отримаємо *характеристичне рівняння*

$$a_n \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + a_2 \lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Залежно від коренів цього рівняння можливі такі випадки.

Перший випадок. Всі n коренів $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні та різні. Тоді фундаментальна система розв'язків має вид

$$y_1 = |x|^{\lambda_1}, \dots, y_n = |x|^{\lambda_n}.$$

Другий випадок. Дійсний корінь λ має кратність m . Тоді цей корінь породжує таку групу фундаментальних розв'язків:

$$|x|^\lambda, |x|^\lambda \ln|x|, |x|^\lambda \ln^2|x|, \dots, |x|^\lambda \ln^{m-1}|x|.$$

Третій випадок. Серед коренів характеристичного рівняння є пара спряжених комплексних розв'язків $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратності m . Тоді

до фундаментальної системи розв'язків увійдуть $|x|^\alpha \cos(\beta \ln |x|)$, $|x|^\alpha \ln |x| \cos(\beta \ln |x|)$, $\dots$, $|x|^\alpha \ln^{m-1} |x| \cos(\beta \ln |x|)$ та аналогічні функції $|x|^\alpha \sin(\beta \ln |x|)$, $\dots$, $|x|^\alpha \ln^{m-1} |x| \sin(\beta \ln |x|)$.

На завершення зауважимо, що рівняння виду $a_n(x+a)^n y^{(n)} + a_{n-1}(x+a)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1(x+a)y' + a_0 y = 0$ розв'язується аналогічно, тільки розв'язки слід шукати у вигляді $y = |x+a|^k$.

Приклад 1.16. Розв'яжемо рівняння $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$.

Шукаємо розв'язки рівняння у вигляді $y = x^\lambda$. Розв'язками характеристичного рівняння $\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ є $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = 3$. Тому загальним розв'язком нашого диференціального рівняння є $y = c_1 x^2 + c_2 x^3$.

Приклад 1.17. Розв'яжемо рівняння $x^3 y''' + xy' - y = 0$.

Шукаємо розв'язки рівняння у вигляді $y = |x|^\lambda$. Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1 = (\lambda-1)^3 = 0$ є $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, то загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд $y = x(c_1 + c_2 \ln |x| + c_3 \ln^2 |x|)$.

Приклад 1.18. Розв'яжемо рівняння $x^2 y''' = 2y'$.

Спочатку помножимо рівняння на x та зведемо його до стандартного вигляду: $x^3 y''' = 2xy'$, $x^3 y''' - 2xy' = 0$. Далі шукаємо його розв'язки у вигляді $y = |x|^\lambda$. Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2\lambda = \lambda^2(\lambda-3) = 0$ є $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ та $\lambda_3 = 3$, то загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд $y = c_1 + c_2 \ln |x| + c_3 x^3$.

Приклад 1.19. Розв'яжемо рівняння $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$.

Шукаємо розв'язки рівняння у вигляді $y = |x|^\lambda$. Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda(\lambda-1) + \lambda + 4 = \lambda^2 + 4 = 0$ є $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, то загальним розв'язком рівняння є $y = c_1 \cos(2 \ln |x|) + c_2 \sin(2 \ln |x|)$.

Приклад 1.20. Розв'яжемо рівняння

$$(2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$$

Перетворенням $2x+3 = 2(x+3/2)$ та скороченням на 2 зведемо його до стандартного вигляду $4(x+3/2)^3 y''' + 3(x+3/2)y' - 3y = 0$. Далі шукаємо його розв'язки у вигляді $y = |x+3/2|^\lambda$. Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $4\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 3\lambda - 3 = (\lambda-1)(4\lambda^2 - 8\lambda + 3) = 0$ є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ та $\lambda_3 = 3/2$, то загальний розв'язок нашого рівняння має вигляд

$$y = c_1(x+3/2) + c_2|x+3/2|^{1/2} + c_3|x+3/2|^{3/2}.$$

Тепер перейдемо до *неоднорідного рівняння Ейлера* (1.5). Заміною $x = \pm e^t$ (звідки $t = \ln |x|$) воно зводиться до лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Як у будь-якого лінійного рівняння загальний розв'язок неоднорідного рівняння Ейлера має вид $y = y_0 + y_u$, де y_0 є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння, а y_u — частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Також, як у будь-якого лінійного рівняння, у неоднорідного рівняння Ейлера має місце *принцип суперпозиції*.

Узагальнене рівняння Ейлера $a_n(x+a)^n y^{(n)} + \dots + a_1(x+a)y' + a_0 y = f(x)$ зводиться до лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною $x+a = \pm e^t$, $t = \ln |x+a|$ та розв'язується аналогічно звичайному рівнянню Ейлера.

Приклад 1.21. Розв'яжемо рівняння $x^2 y'' - x y' + y = 8x^3$.

Спочатку знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння. Шукаючи його розв'язки у вигляді $y = x^\lambda$, отримаємо характеристичне рівняння $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$, розв'язками якого є $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тому загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = x(c_1 + c_2 \ln |x|)$.

Контрольне число (тобто степінь $\lambda = 3$) правої частини нашого рівняння не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Ця права частина має вид ax^3 , а тому частинний розв'язок будемо підбирати в аналогічному вигляді $y = Ax^3$. Звідси $y' = 3Ax^2$ та $y'' = 6Ax$, тож якщо підставити ці вирази в наше рівняння, то отримаємо $6Ax^3 y'' - 3Ax^3 + Ax^3 = 4Ax^3 = 8x^3$, звідки $A = 2$. Отже, частинним розв'язком нашого рівняння є $y_u = 2x^3$, а його загальним розв'язком $y = y_0 + y_u = x(c_1 + c_2 \ln |x|) + 2x^3$.

Приклад 1.22. Розв'яжемо рівняння $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln x)$.

Спочатку знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння. Шукаючи його розв'язки у вигляді $y = x^\lambda$, отримаємо характеристичне рівняння $\lambda(\lambda-1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, розв'язками якого є $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 2$. Тому загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$.

Оскільки характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, то після заміни $x = e^t$ відповідне рівняння зі сталими коефіцієнтами матиме вигляд $y'' - y' - 2y = \sin t$, де $t = \ln x$. Контрольне число тут комплексне та не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Права частина має вид $a \cos t + b \sin t$, а тому частинний розв'язок будемо шукати в аналогічному вигляді $y = A \cos t + B \sin t$. Звідси $y' = -A \sin t + B \cos t$ та $y'' = -A \cos t - B \sin t$, тож якщо підставити ці вирази в наше рівняння, то буде $-A \cos t - B \sin t + A \sin t - B \cos t -$

$2A \cos t - 2B \sin t = (-3A - B) \cos t + (A - 3B) \sin t = \sin t$. Якщо тепер прирівняти коефіцієнти зліва та справа спочатку при $\cos t$, а потім при $\sin t$, то отримаємо $3A + B = 0$ та $A - 3B = 1$, звідки $A = 0,1$, $B = -0,3$. Отже, частинним розв'язком нашого рівняння є $y_c = 0,1 \cos t - 0,3 \sin t = 0,1 \cos(\ln x) - 0,3 \sin(\ln x)$, а його загальним розв'язком $y = y_0 + y_c = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + 0,1 \cos(\ln x) - 0,3 \sin(\ln x)$.

Приклад 1.23. Розв'яжемо рівняння $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$.

Спочатку поділимо рівняння на x та зведемо його до стандартного вигляду $x^2 y'' - 2y = 6x^{-1} \ln x$. Далі шукаємо його розв'язки у вигляді $y = |x|^\lambda$. Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda(\lambda - 1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ є $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 2$, то загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$.

Оскільки характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, то після заміни $x = e^t$ відповідне рівняння зі сталими коефіцієнтами матиме вигляд $y'' - y' - 2y = 6te^{-t}$, де $t = \ln x$. Контрольне число дорівнює -1 і співпадає з λ_1 , тому маємо резонанс. Права частина має вид $(at + b)e^{-t}$, тому відповідно до резонансу частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y = t(At + B)e^{-t} = (At^2 + Bt)e^{-t}$. Звідси $y' = (2At + B)e^{-t} - (At^2 + Bt)e^{-t}$ та $y'' = 2Ae^{-t} - (2At + B)e^{-t} - (2At + B)e^{-t} + (At^2 + Bt)e^{-t}$. Якщо підставити ці вирази в наше рівняння та скоротити на e^{-t} , то буде $2A - 3B - 6At = 6t$, звідки $2A - 3B = 0$ та $-6A = 6$, а тому $A = -1$, $B = -2/3$. Отже, частинним розв'язком нашого рівняння є $y_c = -(t^2 + 2t/3)e^{-t} = -x^{-1}(\ln^2 x + 2 \ln x/3)$, а його загальним розв'язком $y = y_0 + y_c = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 - x^{-1}(\ln^2 x + 2 \ln x/3)$.

Приклад 1.24. Розв'яжемо рівняння $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$. Перетворимо це рівняння до вигляду $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = (x-2) + 2$. Далі шукаємо його розв'язки у вигляді $y = |x-2|^\lambda$. Оскільки розв'язками характеристичного рівняння $\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ є $\lambda_{1,2} = 2$, то загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є $y_0 = (x-2)^2(c_1 + c_2 \ln |x-2|)$.

Оскільки праву частину нашого рівняння ми перетворили на суму $(x-2) + 2$, то внаслідок принципу суперпозиції знайдемо частинні розв'язки двох відповідних неоднорідних рівнянь.

Розпочнемо з рівняння $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x-2$. Права частина має вид $a(x-2)$, а контрольне число правої частини рівняння (тобто степінь 1) не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y = A(x-2)$, звідки $y' = A$, $y'' = 0$, $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = -3A(x-2) + 4A(x-2) = A(x-2) = x-2$ та $A = 1$. Отже, частинним розв'язком першого рівняння є $y_{1c} = x-2$.

В рівнянні $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = 2$ права частина є сталою, відповідно її контрольне число 0 не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y = A$, звідки $y' = y'' = 0$, $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = 4A = 2$ та $A = 1/2$. Отже, частинним розв'язком цього рівняння є $y_{2ч} = 1/2$.

Внаслідок принципу суперпозиції частинним розв'язком нашого початкового рівняння є $y_ч = y_{1ч} + y_{2ч} = x - 2 + 1/2 = x - 3/2$, а загальним розв'язком $y_0 + y_ч = (x-2)^2(c_1 + c_2 \ln |x-2|) + x - 3/2$.

1.3. Метод Лагранжа (метод варіації сталих)

Повернемось до загального лінійного диференціального рівнянням n -го порядку (1.2), тобто до рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Як вже було зауважено, його загальний розв'язок є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку цього рівняння. Також було зауважено, що загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вид

$$y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad (1.7)$$

де $y_1(x), \dots, y_n(x)$ є лінійно незалежними розв'язками однорідного рівняння, які називають *фундаментальною системою розв'язків*.

Якщо фундаментальна система розв'язків нам відома, то загальний розв'язок можна знайти *методом варіації сталих* (який також називають *методом Лагранжа*). Цей метод полягає в тому, що після знаходження загального розв'язку (1.7) однорідного рівняння загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукають у вигляді

$$y_ч = c_1(x)y_1 + \dots + c_n(x)y_n,$$

де для невідомих функцій $c_k(x)$ виконано наступне

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1 y_1 + \dots + c'_n y_n = 0 \\ c'_1 y'_1 + \dots + c'_n y'_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c'_1 y^{(n-2)}_1 + \dots + c'_n y^{(n-2)}_n = 0 \\ c'_1 y^{(n-1)}_1 + \dots + c'_n y^{(n-1)}_n = f(x)/a_n(x) . \end{array} \right. \quad (1.8)$$

розв'язком нашого рівняння є $y = (-x + c_1)e^x + (\ln|x| + c_2)xe^x = e^x(c_1 + c_2x) + xe^x(\ln|x| - 1)$.

Приклад 1.27. Розв'яжемо рівняння $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$.

Спочатку шукаємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Характеристичним рівнянням є $\lambda^2 + 4 = 0$, його коренями $\lambda_{1,2} = \pm 2i$, тож загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Знайдемо загальний розв'язок нашого рівняння методом варіації сталих. Для цього шукаємо цей загальний розв'язок у вигляді $y = c_1(x) \cos 2x + c_2(x) \sin 2x$, де відповідно до (1.8) виконано умови

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos 2x + c_2'(x) \sin 2x = 0 \\ c_1'(x)(-2 \sin 2x) + c_2'(x) 2 \cos 2x = 2 \operatorname{tg} x \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо $c_1'(x) = \cos 2x - 1$ та $c_2'(x) = \sin 2x - \operatorname{tg} x$, звідки $c_1(x) = \sin 2x/2 - x + c_1$ та $c_2(x) = -\cos 2x/2 + \ln|\cos x| + c_2$. Отже, загальним розв'язком нашого рівняння є $y = (\sin 2x/2 - x + c_1) \cos 2x + (-\cos 2x/2 + \ln|\cos x| + c_2) \sin 2x = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - x \cos 2x + \ln|\cos x| \sin 2x$.

Приклад 1.28. Розв'яжемо рівняння $x^2 y'' - xy' + y = x/\ln x$.

Оскільки наше рівняння є рівнянням Ейлера, то розв'язки відповідного однорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = x^\lambda$. Отримаємо характеристичне рівняння $\lambda(\lambda-1) - \lambda + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 = 0$, розв'язками якого є $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тому загальним розв'язком однорідного рівняння є $y_0 = c_1 x + c_2 x \ln x$.

Знайдемо загальний розв'язок нашого рівняння методом варіації сталих. Для цього шукаємо цей загальний розв'язок у вигляді $y = c_1(x)x + c_2(x)x \ln x$, де відповідно до (1.8) виконано умови

$$\begin{cases} c_1'(x)x + c_2'(x)x \ln x = 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)(\ln x + 1) = x/\ln x/x^2 = 1/x \ln x \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему, маємо $c_1'(x) = -1/x$ та $c_2'(x) = 1/x \ln x$, звідки $c_1(x) = -\ln x + c_1$ та $c_2(x) = \ln|\ln x| + c_2$. Отже, загальним розв'язком нашого рівняння є $y = (-\ln x + c_1)x + (\ln|\ln x| + c_2)x \ln x = c_1 x + c_2 x \ln x - x \ln x + x \ln x \ln|\ln x|$.

ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ

2.1. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Лінійна однорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами — це система диференціальних рівнянь виду

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \\ \\ x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n , \end{array} \right. \quad (2.1)$$

де $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — невідомі функції, а всі a_{ij} є сталими. Задача пошуку розв'язку такої системи зводиться до пошуку власних чисел та власних векторів матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Як відомо з лінійної алгебри, власні числа цієї матриці є розв'язками наступного рівняння, яке називають *характеристичним рівнянням*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Власні вектори $\vec{u}$, що відповідають власному числу λ , є розв'язками системи рівнянь $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{0}$, де E є одиничною матрицею. При цьому можливі наступні випадки.

Перший випадок. Всі n коренів $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні та різні. Тоді існує n лінійно незалежних власних векторів $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, які відповідають цим кореням, а загальний розв'язок системи (2.1) має вид

$$\vec{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \vec{u}_n,$$

де векторні функції $e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \vec{u}_n$ називають *фундаментальною системою розв'язків* нашої системи.

Другий випадок. Дійсний корінь λ має кратність m . Якщо йому відповідають m лінійно незалежних власних векторів $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$, то цей корінь породжує таку групу фундаментальних розв'язків: $e^{\lambda t} \vec{u}_1, \dots, e^{\lambda t} \vec{u}_m$. Якщо йому відповідає *лише один* власний вектор $\vec{u}$, то до фундаментальної системи розв'язків увійдуть

$$e^{\lambda t} \vec{u}_1, e^{\lambda t} (t\vec{u}_1 + \vec{u}_2), e^{\lambda t} (t^2 \vec{u}_1 / 2! + t\vec{u}_2 + \vec{u}_3), \dots,$$

$$e^{\lambda t} (t^{m-1} \vec{u}_1 / (m-1)! + t^{m-2} \vec{u}_2 / (m-2)! + \dots + t\vec{u}_{m-1} + \vec{u}_m),$$

де вектори $\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m$ називаються *приєднаними векторами*. Ці приєднані вектори знаходять з таких рівнянь:

$$(A - \lambda E)\vec{u}_2 = \vec{u}_1, (A - \lambda E)\vec{u}_3 = \vec{u}_2, \dots, (A - \lambda E)\vec{u}_m = \vec{u}_{m-1}.$$

Якщо ж цьому кореню відповідають k лінійно незалежних власних векторів $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$, де $1 < k < m$, то до фундаментальної системи увійдуть k розв'язків $e^{\lambda t} \vec{u}_1, \dots, e^{\lambda t} \vec{u}_k$, а також ще додаткові $m - k$ розв'язки, які знаходять із приєднаних векторів аналогічно до попереднього випадку та які залежать від тих власних векторів, до яких ці приєднані вектори було побудовано.

Третій випадок. Серед коренів характеристичного рівняння є комплексна пара розв'язків $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратності 1. Тоді до фундаментальної системи увійдуть розв'язки $Re(e^{(\alpha+i\beta)t} \vec{u})$ та $Im(e^{(\alpha+i\beta)t} \vec{u})$, де $\vec{u}$ є власним вектором, який відповідає власному числу $\alpha + i\beta$. Зауважимо, що з кореня $\alpha - i\beta$ отримаємо аналогічні розв'язки з точністю до знака.

Приклад 2.1. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо власні числа та власні вектори матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Отже, власними числами є $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 3$. Знайдемо власні вектори, які їм відповідають.

Шукаємо власний вектор, який відповідає $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $2\alpha - \beta = 0$. Оскільки $\beta = 2\alpha$, то $(\alpha, \beta) = (\alpha, 2\alpha) = \alpha(1, 2)$, де α є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda_1 = -1$, є $(\alpha, 2\alpha) = \alpha(1, 2)$.

Шукаємо власний вектор, який відповідає $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $2\alpha + \beta = 0$. Оскільки $\beta = -2\alpha$, то $(\alpha, \beta) = (\alpha, -2\alpha) = \alpha(1, -2)$, де α є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda_2 = 3$, є $(\alpha, -2\alpha) = \alpha(1, -2)$.

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} \\ 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$ та $y(t) = 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{3t}$, де c_1 та c_2 є довільними сталими.

Приклад 2.2. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = 5x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо власні числа та власні вектори матриці $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -5 - 4\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Отже, маємо одне власне число $\epsilon \lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Знайдемо власні вектори, які йому відповідають.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha + \beta = 0$. Оскільки $\beta = -\alpha$, то $(\alpha, \beta) = (\alpha, -\alpha) = \alpha(1, -1)$, де $\alpha \in$ довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda_{1,2} = 2$, є $(\alpha, -\alpha) = \alpha(1, -1)$.

Знайдемо приєднаний вектор до власного вектора $\alpha(1, -1)$, де з погляду зручності візьмемо $\alpha = 3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha + \beta = 1$. Нехай $\alpha = 0$, тоді $\beta = 1$, тобто приєднаним вектором буде $(0, 1)$.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 t \\ -c_1 + c_2(-3t + 1) \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x(t) = e^{2t}(c_1 + 3c_2 t)$ та $y(t) = e^{2t}(c_1 + 3c_2 t)$, де c_1 та c_2 є довільними сталими.

Приклад 2.3. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо власні числа та власні вектори матриці $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0.$$

Маємо комплексні власні числа $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Знайдемо власний вектор, який відповідає числу $1 + 3i$:

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $i\alpha + \beta = 0$ та $\beta = -i\alpha$. Нехай $\alpha = 1$, тоді $\beta = -i$, а тому власний вектор має вигляд $(1, -i)$. Відповідний комплексний розв'язок нашої системи має вигляд

$$e^{(1+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 3t + i \sin 3t \\ -i \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix},$$

тобто

$$e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix},$$

тобто $x(t) = e^t(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$ та $y(t) = e^t(c_1 \sin 3t - c_2 \cos 3t)$, де c_1 та c_2 є довільними сталими.

Приклад 2.4. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}.$$

Власними числами відповідної матриці тут є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ та $\lambda_3 = 3$. Знайдемо відповідні власні вектори. Почнемо з $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta + \gamma \\ \alpha + \beta - \gamma \\ \alpha - \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $\alpha - \beta + \gamma = 0$ та $\alpha + \beta - \gamma = 0$, звідки $\alpha = 0$ та $\beta = \alpha + \gamma$, тобто $\beta = \gamma = c_1$, де c_1 є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$, є $(0, c_1, c_1) = c_1(0, 1, 1)$.

Аналогічно для числа $\lambda_2 = 2$ буде

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta + \gamma \\ \alpha - \gamma \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha = \beta = \gamma = c_2$, де c_2 є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають $\lambda_2 = 2$, є $(c_2, c_2, c_2) = c_2(1, 1, 1)$.

Аналогічно для числа $\lambda_3 = 3$ буде

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta + \gamma \\ \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси $-\alpha - \beta + \gamma = 0$ та $\alpha - \beta - \gamma = 0$, звідки $\beta = 0$ та $\alpha = \beta + \gamma$, тобто $\alpha = \gamma = c_3$, де c_3 є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda_3 = 3$, є $(c_3, 0, c_3) = c_3(1, 0, 1)$.

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тобто $x(t) = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ та $z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, де c_1 , c_2 та c_3 є довільними сталими.

Приклад 2.5. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z \end{cases}.$$

Власними числами відповідної матриці тут є $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$. Знайдемо відповідні власні вектори. Почнемо з $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta - \gamma \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha = 0$ та $\beta = -\gamma$, тобто $\gamma = c_1$, $\beta = -c_1$, де c_1 є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$, є $(0, -c_1, c_1) = c_1(0, -1, 1)$.

Знайдемо власний вектор, який відповідає числу $1 + 2i$:

$$\begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - 2i\beta \\ 3\alpha - 2i\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $2i\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha - 2i\beta = 0$ та $3\alpha - 2i\gamma = 0$, звідки $\alpha = 2i\beta$ та $\gamma = 3\alpha/2i = 3\beta$. Нехай $\beta = 1$, тоді $\alpha = 2i$ та $\gamma = 3$, а

тому власний вектор має вигляд $(2i, 1, 3)$. Відповідний комплексний розв'язок нашої системи має вигляд

$$e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2i \cos 2t - 2 \sin 2t \\ \cos 2t + i \sin 2t \\ 3 \cos 2t + 3i \sin 2t \end{pmatrix},$$

тобто

$$e^t \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix},$$

тобто $x(t) = e^t(-2c_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t)$, $y(t) = e^t(-c_1 + c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)$ та $z(t) = e^t(c_1 + 3c_2 \cos 2t + 3c_3 \sin 2t)$, де c_1 , c_2 та c_3 є довільними сталими.

Приклад 2.6. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}.$$

Власними числами відповідної матриці тут є $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Знайдемо відповідні власні вектори. Почнемо з $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \gamma \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha = \beta = \gamma = c_1$, де c_1 є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають $\lambda_1 = 2$, є $(c_1, c_1, c_1) = c_1(1, 1, 1)$.

Для числа $\lambda_{2,3} = 3$ буде

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки $\alpha = \beta + \gamma = c_2 + c_3$, де c_2 та c_3 є довільними сталими. Отже, власними векторами, які відповідають $\lambda_{2,3} = 3$, є $(c_2 + c_3, c_2, c_3) = (c_2, c_2, 0) + (c_3, 0, c_3) = c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 1)$.

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \left(c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

тобто $x(t) = c_1 e^{2t} + e^{3t}(c_2 + c_3)$, $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ та $z(t) = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}$, де c_1 , c_2 та c_3 є довільними сталими.

Приклад 2.7. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x + y - z \\ z' = x + z \end{cases}.$$

Єдиним власним числом відповідної матриці є $\lambda = 2$. Знайдемо відповідні власні вектори.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ 3\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тому $\beta = 2\alpha$ та $\gamma = \alpha$, звідки $(\alpha, \beta, \gamma) = (c_1, 2c_1, c_1)$, де c_1 є довільною сталою. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda = 2$, є $(c_1, 2c_1, c_1) = c_1(1, 2, 1)$.

Знайдемо приєднані вектори до власного вектора $(1, 2, 1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ 3\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

звідки $2\alpha - \beta = 1$ та $\alpha - \gamma = 1$. Тоді $\beta = 2\alpha - 1$ та $\gamma = \alpha - 1$, звідки при $\alpha = 0$ буде $\beta = \gamma = -1$. Отже, приєднаним вектором буде $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, -1, -1)$.

Знайдемо другий приєднаний вектор.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \beta \\ 3\alpha - \beta - \gamma \\ \alpha - \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

звідки $2\alpha - \beta = 0$ та $\alpha - \gamma = -1$. Тоді $\beta = 2\alpha$ та $\gamma = \alpha + 1$, звідки при $\alpha = 0$ буде $\beta = 0$ та $\gamma = 1$. Отже, ще одним приєднаним вектором буде $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 1)$.

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{2t} \left(\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Приклад 2.8. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -x + y + 2z \end{cases}.$$

Єдиним власним числом відповідної матриці є $\lambda = 1$. Знайдемо відповідні власні вектори.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \\ -\alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тому $\alpha - \beta - \gamma = 0$, звідки $\alpha = \beta + \gamma = c_1 + c_2$, де c_1 та c_2 є довільними сталими. Отже, власними векторами, які відповідають власному числу $\lambda = 1$, є $(c_1 + c_2, c_1, c_2) = (c_1, c_1, 0) + (c_2, 0, c_2) = c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 0, 1)$.

Для знаходження приєданого вектора оберемо $c_1 = 2$ та $c_2 = -1$, тобто знайдемо приєднаний вектор до власного вектора $(1, 2, -1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma \\ -\alpha + \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

тобто $\alpha - \beta - \gamma = 1$, звідки при $\beta = \gamma = 0$ буде $\alpha = 1$. Отже, приєднаним вектором буде $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$.

Отже, загальний розв'язок нашої системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^t \left(c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

2.2. Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами

Лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами записується в наступному вигляді

[illegible]

де $x_i(t)$ - невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - стала ма-

триця, $f_i(t)$ - задані функції. Загальний розв'язок даного рівняння записується у вигляді $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_\text{ч}$, де $\vec{x}_0 = \{x_{i0}(t)\}_{i=1}^n$ - загальний розв'язок відповідної однорідної системи, а $\vec{x}_\text{ч} = \{x_{i\text{ч}}(t)\}_{i=1}^n$ - частковий розв'язок неоднорідної системи. Нехай $f_i(t)$ мають вигляд квазіполіномів з контрольним числом k :

$$f_i(t) = e^{kt}(p_{i0}t^m + p_{i1}t^{m-1} + \dots + p_{i(m-1)}t + p_{im}).$$

Тоді $x_{i\psi}(t)$ шукаються у вигляді

$$x_{i\mathbf{q}}(t) = e^{kt}(P_{i0}t^{m+r} + P_{i1}t^{m+r-1} + \dots + P_{i(m+r-1)}t + P_{i(m+r)}),$$

де P_{ij} - невідомі коефіцієнти, які треба знайти, а r рівне кратності кореня характеристичного рівняння, який співпадає із контрольним числом ($r=0$, якщо контрольне число не є коренем характеристичного рівняння). Нехай $f_i(t)$ мають вигляд квазіполіномів з контрольним числом $\alpha + i\beta$:

$$f(x) = e^{\alpha t}((p_{i0}t^m + p_{i1}t^{m-1} + \dots + p_{i(m-1)}t + p_{im})\cos\beta t + (q_{i0}t^m + q_{i1}t^{m-1} + \dots + q_{i(m-1)}t + q_{im})\sin\beta t).$$

Тоді $x_{i\text{ч}}(t)$ шукаються у вигляді

$$x_{i\text{ч}}(t) = e^{\alpha t}((P_{i0}t^{m+r} + P_{i1}t^{m+r-1} + \dots + P_{i(m+r-1)}t + P_{i(m+r)})\cos\beta t + \\ + (Q_{i0}t^{m+r} + Q_{i1}t^{m+r-1} + \dots + Q_{i(m+r-1)}t + Q_{i(m+r)})\sin\beta t,$$

де P_{ij} , Q_{ij} - невідомі коефіцієнти, які треба знайти, а r рівне кратності кореня характеристичного рівняння, який співпадає із контрольним числом ($r=0$, якщо контрольне число не є коренем характеристичного рівняння). Якщо $f_i(t)$ є сумою декількох квазіполіномів, то, як і у випадку лінійних неоднорідних рівнянь, застосовується принцип суперпозиції. Якщо $f_i(t)$ не є квазіполіномом, то для пошуку $x_{i\text{ч}}(t)$ використовується метод Лагранжа (варіації сталих).

Приклад 1.

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2 \end{cases}$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0.$$

Маємо власні числа $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Знайдемо власні вектори, які їм відповідають.

Для числа $k_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow \alpha = c_1, \beta = -c_1.$$

Отже, числу $k_1 = -1$ відповідають власні вектори $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для числа $k_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \alpha = c_2, \beta = c_2.$$

Отже, числу $k_2 = 1$ відповідають власні вектори $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Маємо розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x \end{cases}.$$

Контрольне число дорівнює 1 і співпадає із k_2 , тому $r = 1$. В правій частині системи маємо вираз вигляду ae^t , отже, розв'язок будемо підбирати у наступному вигляді (ступінь полінома біля експоненти зростає на одиницю)

$$x = (A_1 t + B_1)e^t, \quad y = (A_2 t + B_2)e^t.$$

Знайдемо похідні:

$$x' = A_1 e^t + (A_1 t + B_1)e^t, \quad y' = A_2 e^t + (A_2 t + B_2)e^t.$$

Підставляємо отримані вирази в систему і скорочуємо експоненти:

$$\begin{cases} A_1 + \underline{A_1 t} + B_1 = \underline{A_2 t} + B_2 + 2, \\ A_2 + \underline{A_2 t} + B_2 = \underline{A_1 t} + B_1 \end{cases}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля подібних доданків в обох рівняннях зліва і справа:

$$\begin{cases} A_1 = A_2, \\ A_1 + B_1 = B_2 + 2, \\ A_2 = A_1, \\ A_2 + B_2 = B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 - B_2 = 2, \\ B_1 - B_2 = A_2 = A_1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A_1 = 2, \quad A_1 = 1 \\ B_1 - B_2 = A_2 = A_1 = 1, \end{cases}$$

Нехай $B_2 = 0$, тоді $B_1 = 1$. Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч1}} = e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Знайдемо частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + t^2 \end{cases}.$$

Контрольне число дорівнює 0 і не співпадає із власними числами, тому $r = 0$. В правій частині системи маємо вираз вигляду $at^2 + bt + c$, отже, розв'язок будемо підбирати в аналогічному вигляді

$$x = A_1 t^2 + B_1 t + C_1, \quad y = A_2 t^2 + B_2 t + C_2.$$

Знайдемо похідні:

$$x' = 2A_1 t + B_1, \quad y' = 2A_2 t + B_2.$$

Підставляємо отримані вирази в систему:

$$\begin{cases} \underline{2A_1 t + B_1} = \underline{A_2 t^2 + B_2 t + C_2}, \\ \underline{2A_2 t + B_2} = \underline{A_1 t^2 + B_1 t + C_1 + t^2} \end{cases}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля подібних доданків в обох рівняннях зліва і справа:

$$\begin{cases} 0 = A_2, \\ 2A_1 = B_2, \\ B_1 = C_2, \\ 0 = A_1 + 1, \\ 2A_2 = B_1, \\ B_2 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0, \\ B_2 = 2A_1 = -2, \\ C_2 = B_1 = 0, \\ A_1 = -1, \\ B_1 = 2A_2 = 0, \\ C_1 = B_2 = -2 \end{cases}.$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч2}} = \begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч1}} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч2}} = \\ = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2-2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.

$$\begin{cases} x' = y - 5 \cos t, \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = k^2 - k - 2 = 0.$$

Маємо власні числа $k_1 = -1$, $k_2 = 2$. Знайдемо власні вектори, які їм відповідають.

Для числа $k_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \Rightarrow \alpha = c_1, \beta = -c_1.$$

Отже, числу $k_1 = -1$ відповідають власні вектори $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Для числа $k_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = c_2, \beta = 2c_2.$$

Отже, числу $k_2 = 1$ відповідають власні вектори $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Маємо розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = y - 5 \cos t, \\ y' = 2x + y \end{cases}.$$

Контрольне число дорівнює i і не співпадає із власними числами, тому $r = 0$. В правій частині системи маємо вираз вигляду $a \cos t + b \sin t$, отже, розв'язок будемо підбирати в аналогічному вигляді

$$x = A_1 \cos t + B_1 \sin t, \quad y = A_2 \cos t + B_2 \sin t.$$

Знайдемо похідні:

$$x' = -A_1 \sin t + B_1 \cos t, \quad y' = -A_2 \sin t + B_2 \cos t.$$

Підставляємо отримані вирази в систему:

$$\begin{cases} -A_1 \sin t + B_1 \cos t = A_2 \cos t + B_2 \sin t - 5 \cos t, \\ -A_2 \sin t + B_2 \cos t = 2A_1 \cos t + 2B_1 \sin t + A_2 \cos t + B_2 \sin t \end{cases}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля подібних доданків в обох рівняннях зліва і справа:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -A_1 = B_2, \\ B_1 = A_2 - 5, \\ -A_2 = 2B_1 + B_2, \\ B_2 = 2A_1 + A_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} B_2 = -A_1, \\ B_1 = A_2 - 5, \\ -A_2 = 2A_2 - 10 - A_1, \\ -A_1 = 2A_1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} B_2 = -A_1, \\ B_1 = A_2 - 5, \\ 3A_2 - A_1 = 10, \\ A_2 = -3A_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} B_2 = -A_1 = 1, \\ B_1 = A_2 - 5 = -2, \\ -10A_1 = 10 \Rightarrow A_1 = -1, \\ A_2 = -3A_1 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} -\cos t - 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\text{ч} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos t - 2 \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t, \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & -2-k \end{vmatrix} = k^2 + k - 6 = 0.$$

Маємо власні числа $k_1 = -3$, $k_2 = 2$. Знайдемо власні вектори, які їм відповідають.

Для числа $k_1 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha \Rightarrow \alpha = c_1, \beta = -2c_1.$$

Отже, числу $k_1 = -3$ відповідають власні вектори $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Для числа $k_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 2\beta \Rightarrow \beta = c_2, \alpha = 2c_2.$$

Отже, числу $k_2 = 2$ відповідають власні вектори $c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Маємо розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t, \\ y' = 2x - 2y \end{cases}.$$

Контрольне число дорівнює 1 і не співпадає із власними числами, тому $r = 0$. В правій частині системи маємо вираз вигляду $(at + b)e^t$, отже, розв'язок будемо підбирати в аналогічному вигляді

$$x = (A_1 t + B_1)e^t, \quad y = (A_2 t + B_2)e^t.$$

Знайдемо похідні:

$$x' = A_1 e^t + (A_1 t + B_1)e^t, \quad y' = A_2 e^t + (A_2 t + B_2)e^t.$$

Підставляємо отримані вирази в систему і скорочуємо експоненти:

$$\begin{cases} A_1 + \cancel{A_1 t} + \cancel{B_1} = \cancel{A_1 t} + \cancel{B_1} + \underline{2A_2 t} + 2B_2 + \underline{16t}, \\ A_2 + \underline{A_2 t} + B_2 = \underline{2A_1 t} + 2B_1 - \underline{2A_2 t} - 2B_2 \end{cases}.$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля подібних доданків в обох рівняннях зліва і справа:

$$\begin{cases} 0 = 2A_2 + 16, \\ A_1 = 2B_2, \\ A_2 = 2A_1 - 2A_2, \\ A_2 + B_2 = 2B_1 - 2B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = -8, \\ B_2 = A_1/2 = -6, \\ A_1 = 3/2 A_2 = -12, \\ B_1 = A_2/2 + 3/2 B_2 = -13 \end{cases}.$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = e^t \begin{pmatrix} -12t - 13 \\ -8t - 6 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = c_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -12t - 13 \\ -8t - 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4.

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Маємо одне власне число $k_1 = k_2 = 1$. Знайдемо власні вектори, які йому відповідають:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \alpha = c_1, \beta = c_1.$$

Отже, числу $k_1 = k_2 = 1$ відповідають власні вектори $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Шукаємо приєднаний вектор до власного вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha - \beta = 1.$$

Нехай $\beta = 0$, тоді $\alpha = 1$, отже, маємо приєднаний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можемо записати розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Знайдемо частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$$

Контрольне число дорівнює 1 і співпадає із k_1 і k_2 , тому $r = 2$. В правій частині системи маємо вираз вигляду ae^t , отже, розв'язок будемо

підбирати у наступному вигляді (ступінь полінома біля експоненти зростає на двійку)

$$x = (A_1 t^2 + B_1 t + C_1)e^t, \quad y = (A_2 t^2 + B_2 t + C_2)e^t.$$

Знайдемо похідні:

$$x' = (2A_1 t + B_1)e^t + (A_1 t^2 + B_1 t + C_1)e^t, \quad y' = (2A_2 t + B_2)e^t + (A_2 t^2 + B_2 t + C_2)e^t.$$

Підставляємо отримані вирази в систему і скорочуємо експоненти:

$$\begin{cases} \underline{2A_1 t + B_1} + \underline{A_1 t^2} + \underline{B_1 t} + C_1 = \underline{2A_1 t^2} + \underline{2B_1 t} + 2C_1 - \underline{A_2 t^2} - \underline{B_2 t} - C_2, \\ \underline{2A_2 t + B_2} + \underline{A_2 t^2} + \underline{B_2 t} + C_2 = \underline{A_1 t^2} + \underline{B_1 t} + C_1 + 2. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля подібних доданків в обох рівняннях зліва і справа:

$$\begin{cases} A_1 = 2A_1 - A_2, \\ 2A_1 + B_1 = 2B_1 - B_2, \\ B_1 + C_1 = 2C_1 - C_2, \\ A_2 = A_1, \\ 2A_2 + B_2 = B_1, \\ B_2 + C_2 = C_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_2, \\ 2A_1 = B_1 - B_2, \\ B_1 = C_1 - C_2, \\ 2A_2 = B_1 - B_2, \\ B_2 = C_1 - C_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_2, \\ 2A_1 = B_1 - B_2, \\ B_1 = C_1 - C_2, \\ B_1 - B_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = A_2 = -1, \\ 2A_1 = -2, \\ B_1 = C_1 - C_2, \\ B_1 - B_2 = -2 \end{cases}.$$

Нехай $C_1 = C_2 = 0$, тоді $B_1 = 0$, $B_2 = 2$. Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = e^t \begin{pmatrix} -t^2 \\ -t^2 + 2t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\text{ч} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + e^t \begin{pmatrix} -t^2 \\ -t^2 + 2t \end{pmatrix}.$$

Дану систему можна було розв'язати іншим способом:

$$\begin{cases} x' = 2x - y \Rightarrow y = 2x - x', \\ y' = x + 2e^t \end{cases}.$$

Виразимо із першого рівняння y і підставимо в друге рівняння:

$$2x' - x'' = x + 2e^t \Rightarrow x'' - 2x' + x = -2e^t.$$

Маємо лінійне неоднорідне рівняння. Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 1.$$

Отже, $x_o = e^t(c_1 + c_2 t)$. Контрольне число дорівнює 1 і співпадає із k_1 і k_2 , тому маємо подвійний резонанс: $r = 2$. Права частина рівняння має вигляд ae^t , тому, враховуючи резонанс, частковий розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$x = At^2 e^t \Rightarrow x' = At^2 e^t + 2Ate^t \Rightarrow x'' = At^2 e^t + 4Ate^t + 2Ae^t.$$

Підставимо дані вирази у початкове рівняння і скоротимо на експоненту:

$$At^2 + 4At + 2A - 2At^2 - 4At + At^2 = -2 \Rightarrow A = -1.$$

Отже, $x_\text{ч} = -t^2 e^t$. Маємо:

$$x = x_o + x_\text{ч} = e^t(c_1 + c_2 t) - t^2 e^t,$$

$$\begin{aligned} y = 2x - x' &= 2e^t(c_1 + c_2 t) - 2t^2 e^t - e^t(c_1 + c_2 t) - c_2 e^t + 2te^t + t^2 e^t = \\ &= e^t(c_1 + c_2 t - c_2) + e^t(-t^2 + 2t). \end{aligned}$$

Приклад 5.

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \sin t, \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = k^2 + 1 = 0.$$

Маємо комплексні власні числа $k_{1,2} = \pm i$. Знайдемо власний вектор, який відповідає числу i :

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (1-i)\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = (1-i)\alpha.$$

Нехай $\alpha = 1$, тоді $\beta = 1 - i$, отже, маємо власний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Запишемо відповідний комплексний розв'язок системи:

$$\begin{aligned} e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} &= (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t - i \cos t + \sin t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можемо записати розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

Знайдемо частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \sin t, \\ y' = 2x - y \end{cases}.$$

Контрольне число дорівнює i і співпадає із власним числом $k_1 = i$, тому $r = 1$. В правій частині системи маємо вираз вигляду $a \cos t +$

$b \sin t$, отже, враховуючи $r = 1$, розв'язок будемо підбирати в наступному вигляді (ступінь поліномів біля тригонометричних функцій зростає на одиницю):

$$x = (A_1 t + B_1) \cos t + (C_1 t + D_1) \sin t,$$

$$y = (A_2 t + B_2) \cos t + (C_2 t + D_2) \sin t.$$

Знайдемо похідні:

$$x' = A_1 \cos t - (A_1 t + B_1) \sin t + C_1 \sin t + (C_1 t + D_1) \cos t,$$

$$y' = A_2 \cos t - (A_2 t + B_2) \sin t + C_2 \sin t + (C_2 t + D_2) \cos t.$$

Підставляємо отримані вирази в систему:

$$(A_1 + C_1 t + D_1) \cos t + (C_1 - A_1 t - B_1) \sin t = (A_1 t + B_1 - A_2 t - B_2) \cos t + \\ + (C_1 t + D_1 - C_2 t - D_2 + 2) \sin t,$$

$$(A_2 + C_2 t + D_2) \cos t + (C_2 - A_2 t - B_2) \sin t = (2A_1 t + 2B_1 - A_2 t - B_2) \cos t + \\ + (2C_1 t + 2D_1 - C_2 t - D_2) \sin t.$$

Прирівнюємо коефіцієнти біля подібних доданків в обох рівняннях зліва і справа:

$$\begin{cases} A_1 + \underline{C_1 t} + D_1 = \underline{A_1 t} + B_1 - \underline{A_2 t} - B_2, \\ C_1 - \underline{A_1 t} - B_1 = \underline{C_1 t} + D_1 - \underline{C_2 t} - D_2 + 2, \\ A_2 + \underline{C_2 t} + D_2 = \underline{2A_1 t} + 2B_1 - \underline{A_2 t} - B_2, \\ C_2 - \underline{A_2 t} - B_2 = \underline{2C_1 t} + 2D_1 - \underline{C_2 t} - D_2 \end{cases}.$$

Звідси

$$\begin{cases} A_1 + D_1 = B_1 - B_2, \\ C_1 - B_1 = D_1 - D_2 + 2, \\ A_2 + D_2 = 2B_1 - B_2, \\ C_2 - B_2 = 2D_1 - D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = B_1 - B_2 - D_1, \\ C_1 = D_1 - D_2 + B_1 + 2, \\ A_2 = 2B_1 - B_2 - D_2, \\ C_2 = 2D_1 - D_2 + B_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C_1 = A_1 - A_2, \\ -A_1 = C_1 - C_2, \\ C_2 = 2A_1 - A_2, \\ -A_2 = 2C_1 - C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = A_1 - A_2, \\ C_2 = 2A_1 - A_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 - D_2 + B_1 + 2 = -B_1 - D_1 + D_2, \\ 2D_1 - D_2 + B_2 = -B_2 - 2D_1 + D_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = -D_1 + D_2 - 1, \\ B_2 = -2D_1 + D_2. \end{cases}$$

Нехай $D_1 = D_2 = 0$, тоді

$$B_1 = -1, B_2 = 0, A_1 = -1, C_1 = 1, A_2 = -2, C_2 = 0.$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_\text{ч} = \begin{pmatrix} (-t-1)\cos t + t\sin t \\ -2t\cos t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-t-1)\cos t + t\sin t \\ -2t\cos t \end{pmatrix}.$$

Дану систему можна було розв'язати іншим способом:

$$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t, \\ y' = 2x - y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y' + y) \end{cases}.$$

Виразимо із другого рівняння x і підставимо в перше рівняння:

$$\frac{1}{2}(y'' + y') = \frac{1}{2}(y' + y) - y + 2\sin t \Rightarrow y'' + y = 4\sin t.$$

Маємо лінійне неоднорідне рівняння. Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i.$$

Отже, $y_0 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Контрольне число дорівнює i і співпадає із k_1 , тому маємо резонанс: $r = 1$. Права частина рівняння має вигляд

Тоді частковий розв'язок неоднорідної системи шукається у вигляді

$$\vec{x}_q = c_1(t)\vec{x}_1 + \dots + c_n(t)\vec{x}_n,$$

де невідомі функції $c_i(t)$ визначаються наступною системою рівнянь

$$c'_1(t)\vec{x}_1 + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n = \vec{f}(t),$$

де $\vec{f}(t) = \{f_i(t)\}_{i=1}^n$.

Приклад 1.

$$\begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1, \\ y' = -x + tg t \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = k^2 + 1 = 0.$$

Маємо власні числа $k_{1,2} = \pm i$. Знайдемо власний вектор, який відповідає числу i :

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -i\alpha + \beta = 0.$$

Нехай $\alpha = 1$, тоді $\beta = i$, отже, маємо власний вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Запишемо відповідний комплексний розв'язок однорідної системи:

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Маємо розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Розв'язок неоднорідної системи будемо шукати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

де невідомі функції $c_1(t)$, $c_2(t)$ визначаються системою рівнянь

$$c_1'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2'(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tg^2 t - 1 \\ tg t \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо дану систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} tg^2 t - 1 & \sin t \\ tg t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{\sin^2 t}{\cos t} - \cos t - \frac{\sin^2 t}{\cos t} = -\cos t,$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos t & tg^2 t - 1 \\ -\sin t & tg t \end{vmatrix} = \sin t + \sin t tg^2 t - \sin t = \sin t \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) = \\ &= \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t. \end{aligned}$$

Маємо

$$c_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\cos t \Rightarrow c_1(t) = -\sin t + \tilde{c}_1,$$

$$\begin{aligned} c_2'(t) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t \Rightarrow c_2(t) = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t dt = \\ &= \int \frac{-d(\cos t)}{\cos^2 t} + \cos t = \frac{1}{\cos t} + \cos t + \tilde{c}_2. \end{aligned}$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} &= -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t \right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin t \cos t + tg t + \sin t \cos t \\ \sin^2 t + 1 + \cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tg t \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tg t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Дану систему можна розв'язати і іншим способом:

$$\begin{cases} x' = y + t g^2 t - 1, \\ y' = -x + t g t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y + \frac{1}{\cos^2 t} - 2, \\ y' = -x + t g t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x - t g t)' = y - 2, \\ (y - 2)' = -(x - t g t). \end{cases}$$

Зробимо заміну $u = x - t g t$, $v = y - 2$ і отримаємо однорідну систему:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи ми вже знаходили вище:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t g t \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t g t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.

$$\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -3x + 4y + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} -1-k & 2 \\ -3 & 4-k \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0.$$

Маємо власні числа $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Знайдемо власні вектори, які відповідають числу $k_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \alpha = c_1, \beta = c_1.$$

Отже, числу 1 відповідають власні вектори $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Знайдемо власні вектори, які відповідають числу $k_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 3/2\alpha \Rightarrow \alpha = 2c_2, \beta = 3c_2.$$

Отже, числу 2 відповідають власні вектори $c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Запишемо розв'язок однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок неоднорідної системи будемо шукати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

де невідомі функції $c_1(t)$, $c_2(t)$ визначаються системою рівнянь

$$c_1'(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2'(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{pmatrix}.$$

Скоротивши на e^t , дану систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} c_1' + 2c_2' e^t = 0, \\ c_1' + 3c_2' e^t = \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = -2c_2' e^t, \\ c_2' e^t = \frac{e^{2t}}{e^{2t}+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = -\frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1}, \\ c_2' = \frac{e^t}{e^{2t}+1} \end{cases}.$$

Маємо

$$c_1(t) = - \int \frac{2e^{2t}}{e^{2t}+1} dt = - \int \frac{d(e^{2t}+1)}{e^{2t}+1} = -\ln(e^{2t}+1) + \tilde{c}_1,$$

$$c_2(t) = \int \frac{e^t}{e^{2t}+1} dt = \int \frac{d(e^t)}{e^{2t}+1} = \arctg e^t + \tilde{c}_2.$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = -e^t \ln(e^{2t} + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - e^t \ln(e^{2t} + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \operatorname{arctg} e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}.$$

Спочатку знайдемо розв'язок відповідної однорідної системи.

$$\begin{vmatrix} 3-k & -2 \\ 2 & -1-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Маємо одне власне число $k_1 = k_2 = 1$. Знайдемо власні вектори, який йому відповідають:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \Rightarrow \alpha = c_1, \beta = c_1.$$

Отже, числу 1 відповідають власні вектори $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Шукаємо приєднаний вектор до власного вектора $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 2.$$

Нехай $\alpha = 0$, тоді $\beta = -1$, отже, маємо приєднаний вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо розв'язок однорідної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_o = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Розв'язок неоднорідної системи будемо шукати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

де невідомі функції $c_1(t)$, $c_2(t)$ визначаються системою рівнянь

$$c_1'(t) e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2'(t) e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15e^t \sqrt{t} \end{pmatrix}.$$

Скоротивши на e^t , дану систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} c_1' + 2c_2' t = 0, \\ c_1' + 2c_2' t - c_2' = 15\sqrt{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = -2c_2' t, \\ -c_2' = 15\sqrt{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = 30t^{3/2}, \\ c_2' = -15\sqrt{t} \end{cases}.$$

Маємо

$$c_1(t) = 12t^{5/2} + \tilde{c}_1, \quad c_2(t) = -10t^{3/2} + \tilde{c}_2.$$

Маємо наступний частковий розв'язок:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч}} = 12t^{5/2} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 10t^{3/2} e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} -8t^{5/2} \\ -8t^{5/2} + 10t^{3/2} \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + e^t \begin{pmatrix} -8t^{5/2} \\ -8t^{5/2} + 10t^{3/2} \end{pmatrix}.$$

Бібліографія

- [1] Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння: підручник. - К.: Либідь, 2004.
- [2] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах. - К.: Либідь, 2003.
- [3] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні та інтегральні рівняння: підручник. - К.: Либідь, 2003.
- [4] Кривошея С.А., Майко Н.В., Сугакова О.В. Диференціальні рівняння: завдання для самостійної роботи студентів. - К.: Київський університет, 2010.

Навчальне видання

Масютка Олександр Юрійович

Радченко Олександр Миколайович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. Лінійні рівняння та лінійні
системи

Навчальний посібник

*Оригінал-макет виготовлено авторами за допомогою видавничого
пакету $\text{\LaTeX}$ 2_ε*

Формат 60 × 84/16. Друк офсетний. Гарнітура Тетрого-TLF.
Зам.03-1016. Умовн. друк. арк. 3,5.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"