

**Розв'язки задач
фінального туру
Всеукраїнської олімпіади з фізики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка - 2024**

Задача №1

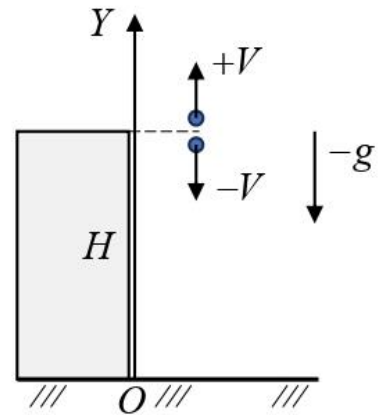
З даху будинку висотою $H = 37,5\text{ м}$ одночасно кидають дві металеві кульки – одну вертикально вгору, другу вертикально вниз з однаковими за модулем швидкостями. В моменті падіння кульок на землю швидкість кожної з них перевищує початкову швидкість у 2 рази. Визначте інтервал часу між моментами падіння кульок.

Розв'язок

Виберемо систему відліку з початком на поверхні землі, вертикальну вісь OY спрямуємо вертикально вгору (див. рис.)

1.) Визначимо початкову швидкість кульок. За законом збереження енергії для кожної з кульок

$$mgH + \frac{mV^2}{2} = \frac{m(2V)^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2gH}{3}} \quad (1)$$



2) Запишемо рівняння для швидкості кожної кульки у векторному вигляді

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{g}t \quad (2)$$

В момент падіння першої кульки $t = t_1$ рівняння (2) в проєкції на вісь OY набуває вигляду

$$-2V = V - gt_1 \quad (3)$$

В момент падіння другої кульки $t = t_2$

$$-2V = -V - gt_2 \quad (4)$$

Віднімаючи від (3) рівняння (4), отримаємо

$$t_1 - t_2 = \frac{2V}{g} = \frac{2}{g} \sqrt{\frac{2gh}{3}} \quad (5)$$

Обчислення: $t_1 - t_2 = \frac{2}{\sqrt{9,81}} \sqrt{\frac{2 \cdot 37,5}{3}} = 3,19 \text{ (с)}$.

Задача №2

При охолодженні одного моллю гелію його температура зменшилася у $k = 2$ рази, а внутрішня енергія – на $\Delta E = 3740 \text{ Дж}$. Процес охолодження описується рівнянням $PV^2 = \text{const}$. Якими є кінцеві тиск, температура та об'єм газу, якщо початковий тиск складає $P_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$?

Розв'язок

1.) Внутрішня енергія ідеального одноатомного газу дорівнює

$$E = \frac{3}{2} \nu RT, \quad (1)$$

де ν - кількість молей, $R = 8,31 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$ – універсальна газова стала. Зменшення внутрішньої енергії

$$\Delta E = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R (kT_2 - T_2) = \frac{3}{2} \nu RT_2 (k - 1) \quad (2)$$

Враховано, що $k = \frac{T_1}{T_2}$. З рівняння (2) визначимо кінцеву температуру газу

$$T_2 = \frac{2\Delta E}{3\nu R(k - 1)} \quad (3)$$

Обчислення: $T_2 = \frac{2 \cdot 3740}{3 \cdot 1 \cdot 8,31 \cdot (2 - 1)} = 300 \text{ (К)}$. Початкова температура

$$T_1 = kT_2 = 2 \cdot 300 = 600 \text{ (К)}$$

2.) Запишемо об'єднаний газовий закон та рівняння процесу охолодження газу

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad (4)$$

$$P_1 V_1^2 = P_2 V_2^2 \quad (5)$$

Виключаючи з рівнянь (4) та (5) відношення об'ємів, отримаємо

$$\frac{P_1 T_2}{T_1} = P_2 \frac{V_2}{V_1} = P_2 \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \Rightarrow P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \quad (6)$$

Обчислення: $P_2 = 2 \cdot 10^5 \left(\frac{300}{600} \right)^2 = \frac{2 \cdot 10^5}{4} = 5 \cdot 10^4 \text{ Па.}$

Об'єми газу: $PV = \nu RT \Rightarrow V_1 = \frac{\nu RT_1}{P_1}; V_2 = \frac{\nu RT_2}{P_2}.$

Обчислення: $V_1 = \frac{1,8,31 \cdot 600}{2 \cdot 10^5} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ (м}^3\text{)}; V_2 = \frac{1,8,31 \cdot 300}{5 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ (м}^3\text{)}.$

Задача №3

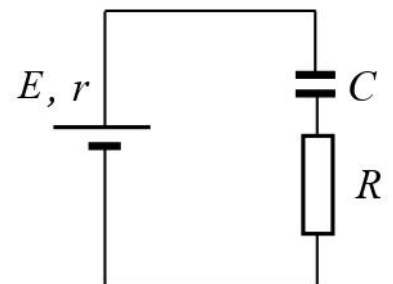
Резистор, що має опір $R = 5 \text{ Ом}$, та деякий конденсатор двічі приєднують до джерела постійного струму: перший раз – з'єднавши їх між собою послідовно, другий – з'єднавши паралельно. Виявилось, що у першому випадку заряд на конденсаторі у $k = 1,2$ разів більший, ніж у другому. Яким є внутрішній опір джерела струму?

Розв'язок

1.) Послідовне з'єднання резистора та конденсатора (див. рис.).

Постійний струм через конденсатор не протікає. Тому повний заряд на конденсаторі визначається прикладеною до нього напругою, яка за відсутності струму дорівнює е.р.с. джерела (E). Заряд на конденсаторі

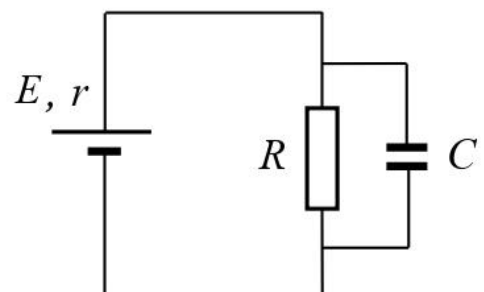
$$q_1 = CE \quad (1)$$



2.) Паралельне з'єднання резистора та конденсатора (див. рис.).

В колі через резистор та джерело буде проходити струм силою

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (2)$$



Напруга на резисторі

$$U = IR = \frac{ER}{R+r} \quad (3)$$

Ця ж напруга прикладена до конденсатора, тому заряд на конденсаторі при паралельному з'єднанні

$$q_2 = CU = \frac{CER}{R+r} \quad (4)$$

За умовою заряд на конденсаторі при послідовному з'єднанні у $k = 5$ разів більший, ніж при паралельному, тому

$$k = \frac{q_1}{q_2} = \frac{CE(R+r)}{CER} = \frac{R+r}{R} \Rightarrow r = R(k-1) \quad (5)$$

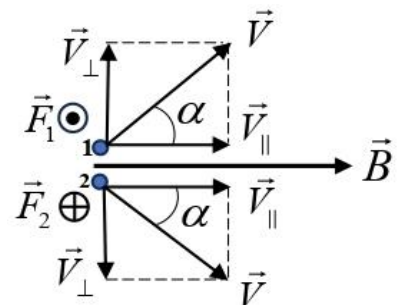
Обчислення: $r = 5(1,2 - 1) = 1$ (Ом).

Задача №4

В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 2$ Тл із однієї точки джерела починають одночасно рухатися два електрони зі сталими й однаковими за величиною швидкостями $V = 10^4$ м/с. Кут між векторами швидкостей дорівнює $2\alpha = 60^\circ$, вектор індукції та вектори швидкостей лежать в одній площині (див. рис). Через який час від початку руху та в якій точці електрони зустрінуться? Відношення заряду електрона до його маси $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Розв'язок

Розкладемо вектор швидкості кожного електрона на дві складові – поздовжню $\vec{V}_{\parallel} = \vec{V} \cos \alpha$, яка спрямована вздовж ліній магнітної індукції, та поперечну $\vec{V}_{\perp} = \vec{V} \sin \alpha$, що перпендикулярна до вектора \vec{B} (див. рис.). Поздовжня складова швидкості визначає рівномірний рух електронів вздовж силової ліній магнітного поля. Крім того, на кожний



електрон буде діяти сила Лоренца, перпендикулярна до площини рисунка (оскільки $\vec{V}_\perp \perp \vec{B}$), причому напрямок сили, що діє на умовно перший електрон (\vec{F}_1) протилежний до напрямку сили, що діє на другий електрон ($\vec{F}_1 \updownarrow \vec{F}_2$). Під дією сил \vec{F}_1, \vec{F}_2 , які чисельно однакові, електрони будуть рухатися по колам, що лежать в площині, перпендикулярній до площини рисунка (див. рис.), причому напрямки обертання електронів протилежні. Електрони зустрінуться, коли кожний з них виконає повний оберт. Рівняння руху електрона в проєкції на вісь, що спрямована вздовж радіусу до центра кола

$$\frac{mV_\perp^2}{R} = eV_\perp B \Rightarrow R = \frac{mV_\perp}{eB}, \quad (1)$$

R – радіус кола. Період обертання електрона

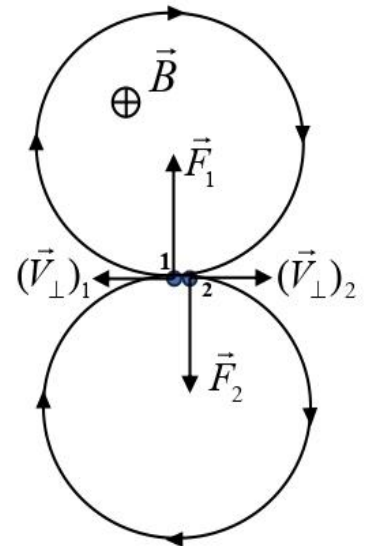
$$T = \frac{2\pi R}{V_\perp} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (2)$$

За час T електрони пройдуть шлях вздовж силової лінії

$$L = (V \cos \alpha)T = \frac{2\pi m \cdot V \cos \alpha}{eB} = \frac{2\pi m \cdot V \cos \alpha}{eB} \quad (3)$$

Електрони вперше зустрінуться на відстані L від початкової точки вздовж силової лінії через час T . Траєкторіями руху електронів є спіралі з кроком L .

Обчислення: $T = \frac{2 \cdot 3,14}{1,76 \cdot 10^{11} \cdot 2} = 1,78 \cdot 10^{-11} (с)$. $L = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1,76 \cdot 10^{11} \cdot 2} = 1,55 \cdot 10^{-7} (м)$



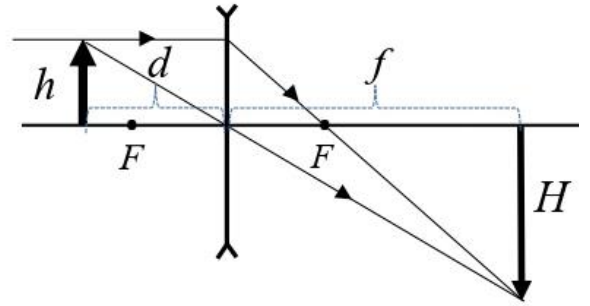
Задача №5

Тонка збиральна лінза створює на екрані зображення предмета, розташованого перпендикулярно до головної оптичної осі, зі збільшенням $\Gamma_1 = 2$. Коли предмет перемістили в бік від лінзи на відстань $a = 30$ см зображення предмета виявилось зменшеним у стільки ж разів. Якими є фокусна відстань та оптична сила лінзи?

Розв'язок

Хід променів, що відповідає початковому положенню предмета, наведено на рисунку. Рівняння плоскої збиральної лінзи

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad (1)$$



Відповідні відстані вказані на рисунку. Лінійне збільшення предмета

$$\Gamma_1 = \frac{H}{h} = \frac{f}{d} \Rightarrow f = \Gamma_1 d \quad (2)$$

Об'єднуючи рівняння (1) та (2), отримаємо

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma_1 d} = \frac{1}{F} \Rightarrow d = F \left(\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} \right) \quad (3)$$

Після зміщення відстань предмета до лінзи складає $(d + a)$, а нова відстань від лінзи до зображення f' . В цьому випадку рівняння лінзи

$$\frac{1}{d + a} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{F} \quad (4)$$

Тепер збільшення $\Gamma_2 = \frac{f'}{(d + a)}$. За умовою задачі $\Gamma_2 = \frac{1}{\Gamma_1}$, отже $f' = \frac{d + a}{\Gamma_1}$.

Рівняння (4) набуде вигляду

$$\frac{1}{d + a} + \frac{\Gamma_1}{d + a} = \frac{1}{F} \Rightarrow d + a = F(1 + \Gamma_1) \quad (4)$$

З рівнянь (3) та (4) отримаємо

$$(d + a) - d = F(\Gamma_1 + 1) - F \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} \Rightarrow a = F(\Gamma_1 + 1) - F \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} = F \frac{\Gamma_1^2 - 1}{\Gamma_1} \quad (5)$$

Отже, фокусна відстань лінзи

$$F = \frac{a\Gamma_1}{\Gamma_1^2 - 1}$$

6)

Обчислення: $F = \frac{30 \cdot 2}{2^2 - 1} = 20$ (см). Оптична сила $D = \frac{1}{F} = \frac{1}{0,2} = 5$ (дптр).