

**Факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем**

**Кафедра математики та теоретичної радіофізики**

**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**

Заступник декана з навчальної роботи

\_\_\_\_\_ Олексій НЕЧИПОРУК

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 року

## **РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

### **Диференціальні рівняння та теорія ймовірностей**

**Частина перша «Диференціальні рівняння».**

галузь знань	<b>10 Природничі науки</b>
спеціальність	<b>105 Прикладна фізика та наноматеріали</b>
освітній рівень	<b>перший (бакалавр)</b>
освітня програма	<b>Електроніка та інформаційні технології в медицині</b>
вид дисципліни	<b>обов'язкова</b>

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2022/2023
Семестр	3
Кількість кредитів ECTS	4
Мова викладання	українська
Форма заключного контролю	іспит

#### **Викладачі:**

Олена СУГАКОВА, доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики та теоретичної радіофізики.

Оксана МОТОРНА, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики та теоретичної радіофізики.

Олександр МАСЮТКА, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики та теоретичної радіофізики.

Пролонговано: на 20\_\_/20\_\_ н. р. \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ ) « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.  
на 20\_\_/20\_\_ н. р. \_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ ) « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ р.

**Розробник:**

Олена СУГАКОВА, доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри математики та теоретичної радіофізики.

**«ЗАТВЕРДЖЕНО»**

Завідувач кафедри математики та теоретичної  
радіофізики

\_\_\_\_\_ Володимир ВИСОЦЬКИЙ

Протокол № \_\_ від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

Схвалено науково-методичною комісією факультету радіофізики, електроніки та  
комп'ютерних систем

Протокол № \_\_ від « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

Голова науково-методичної комісії

Сергій РАДЧЕНКО

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 року.

## ВСТУП

**1. Мета дисципліни** – оволодіння студентами основними поняттями і методами сучасної теорії диференціальних рівнянь, засвоєння ними математичного апарату, необхідного для дослідження диференціальних рівнянь, а також оволодіння навичками застосування знань в подальшому навчанні та професійній діяльності.

### **2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:**

До вивчення дисципліни першої частини «Диференціальні рівняння та теорія ймовірностей» необхідно пройти підготовку і скласти іспити з таких предметів: «Математичний аналіз», «Загальна алгебра».

Попередні вимоги:

*студент повинен знати:* комплексні числа, основні методи інтегрування і диференціювання, техніку інтегрування, заміну змінних у диференціальних виразах, методи розв'язку лінійних алгебраїчних систем, методи пошуку власних чисел і власних векторів матриці, мати поняття про метричні простори.

*студент повинен вміти:* використовувати засвоєні методи диференціювання і інтегрування на практиці при розв'язку диференціальних рівнянь, вміти розв'язувати окремі задачі з курсів «Математичного аналізу» і «Загальної алгебри».

### **3. Анотація навчальної дисципліни:**

«Диференціальні рівняння» є базовим математичним розділом для подальшого вивчення більшості фізичних курсів. Ця дисципліна необхідна для формування професійного світогляду фахівця з прикладної фізики. Методи диференціальних рівнянь широко використовуються при вивченні інших дисциплін, що викладаються в наступних семестрах бакалаврату та в магістратурі з прикладної фізики.

Навчальна дисципліна складається з трьох частин. Перша частина присвячена рівнянням першого порядку і методам їх вирішення: з відокремлюваними змінними і звідними до них, лінійним, рівнянням Бернуллі і Ріккаті, методам параметризації на прикладі рівнянь Лагранжа і Клеро, методам пониження порядку в рівняннях вищого порядку, ніж перший. Друга частина стосується теорії лінійних рівнянь і систем, їх властивостей. Розглядаються рівняння зі сталими коефіцієнтами і зі змінними, формула Абеля, метод Ейлера, метод варіації довільних сталих, метод підбору розв'язку у випадку, коли права частина є квазіполіномом. Також розглядаються лінійні системи: методи виключення і інтегровних комбінацій, метод Ейлера для систем зі сталими коефіцієнтами, метод варіації сталих тощо. Третя частина курсу містить деякі додаткові аспекти теорії диференціальних рівнянь: теорію стійкості за Ляпуновим, операційний метод у застосуванні до рівнянь і систем зі сталими коефіцієнтами, інтегральних рівнянь типу згортки, задачу Штурма-Ліувілля, метод функції Гріна у застосуванні до розв'язку крайових задач.

### **4. Завдання навчальної дисципліни (навчальні цілі):** ознайомлення студентів з:

- 1) математичною термінологією, яка пов'язана з теорією диференціальних рівнянь;
- 2) методами розв'язування найпростіших типів диференціальних рівнянь першого порядку і методами пониження порядку;
- 3) теоремами існування і єдиності розв'язку таких рівнянь;
- 4) теорією лінійних рівнянь і систем (однорідних і неоднорідних);
- 5) теорією стійкості за Ляпуновим;
- 6) основами операційного числення;
- 7) різними типами лінійних крайових задач, функцією Гріна;
- 8) методами розв'язування лінійних і квазілінійних рівнянь з частинними похідними.

Дисципліна спрямована на формування програмних компетентностей:

- коди, назви компетентностей із переліку компетентностей в описі освітньої програми
- Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності (ЗК-4).
  - Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК-9).
  - Здатність використовувати сучасні теоретичні уявлення в галузі фізики для аналізу фізичних систем (ФК-8).
  - Здатність використовувати методи і засоби теоретичного дослідження та математичного

моделювання в професійній діяльності (ФК-9).

**5. Результати навчання за дисципліною:**

Результат навчання (1, знати; 2, вміти; 3, комунікація; 4, автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
<b>1</b>	<b>знати:</b>	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	до 45
1.1	основні поняття теорії диференціальних рівнянь	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
1.2	методи розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку і пониження порядку	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
1.3	теорію лінійних диференціальних рівнянь і систем, однорідних і неоднорідних, формулу Остроградського-Ліувілля, метод варіації довільних сталих, матричний метод	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
1.4	поняття стійкості за Ляпуновим, дослідження положень рівноваги	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
1.5	властивості перетворень Лапласа	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
1.6	різні типи лінійних крайових задач. Власні функції і власні числа задачі Штурма-Ліувілля.	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
1.7	лінійні і квазілінійні рівняння з частинними похідними 1-го порядку.	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
<b>2</b>	<b>вміти:</b>	лекційні заняття, практичні заняття	письмові модульні контрольні роботи	до 45
2.1	розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку відомих типів, вміти понижувати порядок	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.2	розв'язувати лінійні однорідні рівняння і системи, методом Ейлера, матричним	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.3	розв'язувати лінійні неоднорідні рівняння і системи методом Лагранжа(варіації довільних сталих), методом підбору частинного розв'язку у вигляді квазіполінома	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.4	досліджувати розв'язки рівнянь і систем на стійкість, досліджувати на стійкість за першим наближенням	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.5	досліджувати на стійкість положення рівноваги автономної системи рівнянь	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.6	застосовувати метод операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь і систем, інтегральних рівнянь типу згортки	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.7	застосовувати метод функції Гріна при розв'язку лінійних крайових задач	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
2.8	розв'язувати лінійні і квазілінійні рівняння з частинними похідними	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	
<b>3</b>	<b>комунікація:</b>	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	до 5
3.1	Здатність грамотно будувати наукову комунікацію як в усній так і письмовій формах, підбирати правильну термінологію	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	

4	<b>автономність та відповідальність:</b>	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	до 5
4.1	продемонструвати розуміння особистої/персональної відповідальності за професійні та/або управлінські рішення, які базуються на використанні математичних методів	лекційні заняття, практичні заняття	Контрольні та індивідуальні домашні роботи	

**6. Співвідношення результатів навчання дисципліни із програмними результатами навчання**

Результати навчання дисципліни																		
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	3.1	4.1	
<b>Програмні результати навчання (назва)</b>																		
ПРН 1. Знати і розуміти сучасну фізику на рівні, достатньому для розв'язання складних спеціалізованих задач і практичних проблем прикладної фізики.	+	+	+	+	+	+												
ПРН 2. Застосовувати ефективні технології, інструменти та методи експериментального дослідження властивостей речовин і матеріалів, включаючи наноматеріали, при розв'язанні практичних проблем прикладної фізики						+	+				+			+	+			+
ПРН 5. Застосовувати сучасні математичні методи для побудови й аналізу математичних моделей фізичних процесів								+	+	+		+	+	+				
ПРН 7. Застосовувати фізичні, математичні та комп'ютерні моделі для дослідження фізичних явищ, розробки приладів і наукоємних технологій.					+						+						+	+
ПРН 14. Оцінювати фінансові, матеріальні та інші витрати, пов'язані з реалізацією проектів у сфері прикладної фізики, соціальні, екологічні та інші потенційні наслідки реалізації проектів		+								+			+	+	+	+	+	+

## 7. Схема формування оцінки

### 7.1. Форми оцінювання

Рівень досягнення всіх запланованих результатів навчання визначається за результатами написання письмових контрольних робіт. Внесок результатів навчання у підсумкову оцінку, за умови їх опанування на належному рівні:

- результати навчання 1.1 – 1.7 [знання] – до 45 %;
- результат навчання 2.1 – 2.8 [вміння] – до 45%;
- результат навчання 3.1 [комунікація] – до 5%;
- результат навчання 4.1 [автономність та відповідальність] – до 5%;

Форми оцінювання:

- **семестрове оцінювання:** Навчальний семестр має два змістовні модулі. Перший модуль оцінюється максимально до 35 балів, другий – до 25 балів. Виконання індивідуальних домашніх завдань є складовою частиною відповідного модуля. Письмові контрольні роботи проводяться після завершення відповідних тем. В курсі передбачені три поточні контрольні роботи і дві модульні.
- **підсумкове оцінювання (у формі іспиту):** форма іспиту – письмово-усна. Екзаменаційний білет іспиту складається із 2 теоретичних питань і 3 задач. Кожне питання і кожна задача оцінюється від 0 до 8 балів. Всього за іспит можна отримати від 0 до 40 балів.
- **умови допуску до підсумкового іспиту:** умовою допуску до іспиту є отримання студентом сумарно не менше, ніж *критично-розрахунковий мінімум* за семестр. Студенти, які протягом семестру сумарно набрали меншу кількість балів, ніж критично-розрахунковий мінімум **36 балів**, для одержання допуску до іспиту обов'язково повинні написати додаткову контрольну роботу.

У випадку відсутності студента з поважних причин відпрацювання та перездачі модульних контрольних робіт здійснюються у відповідності до „Положення про організацію освітнього процесу у Київському національному університеті”

### 7.2. Організація оцінювання:

*Поточне оцінювання за формами контролю:*

	ЗМ1		ЗМ2	
	Min. – 11 балів	Max. – 35 балів	Min. – 14 балів	Max. – 25 балів
Контрольна робота	1	5		
Контрольна робота	1	5		
Домашня самостійна робота	1	5		
Домашня самостійна робота	1	5		
Модульна контрольна робота 1	7	15		
Домашня самостійна робота			6	10
Модульна контрольна робота 2			7	15

*Орієнтований графік оцінювання:*

	<i>Орієнтовний період для здійснення відповідної форма оцінювання</i>
Модульна контрольна робота 1	жовтень
Модульна контрольна робота 2	кінець листопада-початок грудня
Виконання студентами самостійних робіт	листопад-початок грудня
Добір балів/додаткова контрольна робота та/або доскладання домашніх завдань	грудень
Іспит	друга половина грудня

Розрахунок балів, які отримують при успішній здачі іспиту:

Значення	Змістовні модулі	Іспит	Підсумкова оцінка
Мінімум	36	24	60
Максимум	60	40	100

### 7.3. Шкала відповідності оцінок

Оцінка (за національною шкалою) / National grade	Рівень досягнень, % / Marks, %
<b>Відмінно</b> / Excellent	90-100%
<b>Добре</b> / Good	75-89%
<b>Задовільно</b> / Satisfactory	60-74%
<b>Незадовільно</b> / Fail	0-59%

## 8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекційних занять

**Примітка:** Теми практичних занять співпадають із темами відповідних лекцій.

№ з/п	Назва теми	Кількість годин		
		Лекції	Практичні заняття	Самостійна робота
<b>Змістовний модуль 1</b>				
1	Основні означення теорії скалярних рівнянь 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними	2	2	4
2	Лінійні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі, Ріккати, в повних диференціалах.	2	2	4
3	Існування і єдиність розв'язку задачі Коші для диф. рівняння 1-го порядку.	2	2	4
4	Диференціальні рівняння вищих порядків, методи пониження.	2	2	4
5	Дінійні диференціальні рівняння(ЛДР) n-го порядку. Лінійні однорідні рівняння(ЛОР).	2	2	4
6	ЛОР зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих у випадку лінійних неоднорідних рівнянь (ЛНДР).	2	2	4
7	ЛНДР зі сталими коефіцієнтами з правою частиною у вигляді квазіполінома.	2	2	4
8	Системи ЛДР. Властивості лінійних однорідних систем(ЛОС). Метод Ейлера.	2	2	4



9	Властивості лінійних неоднорідних систем(ЛНС).	2	2	4
<b>Змістовний модуль №2</b>				
10	Поняття стійкості за Ляпуновим. Типи точок спокою.	2	2	4
11	Стійкість за першим наближенням. Фазовий портрет системи.	2	2	4
12	Операційне числення. Основні теореми про перетворення Лапласа.	2	2	6
13	Лінійні крайові задачі. Функція Гріна.	2	2	4
14	Спектральні крайові задачі. Задача Штурма-Ліувілля.	4	4	2
<b>Всього</b>		<b>30</b>	<b>30</b>	<b>60</b>

Загальний обсяг **120** год., в тому числі:

Лекції **30** год.

Практичні заняття **30** год.

Самостійна робота **60** год.

## План лекцій і практичних занять

### ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ I

#### Лекція 1.

Звичайне диференціальне рівняння (ДР), рівняння в частинних похідних, порядок і розв'язок ДР, інтегральна крива, загальний інтеграл і частинний розв'язок рівняння. Метод ізоклін. Рівняння з відокремлюваними змінними і звідні до них (однорідні, квазіоднорідні).

#### Практичне заняття 1.

Метод ізоклін. Рівняння з відокремлюваними змінними і звідні до них. Приклади: рівняння радіоактивного розпаду, задачі механіки і т.д., які зводяться до розв'язку рівнянь з відокремлюваними змінними.

#### Лекція 2.

Лінійні рівняння першого порядку. Метод варіації сталої і метод Бернуллі. Рівняння Бернуллі та Ріккаті. Рівняння в повних диференціалах. Поняття інтегрального множника.

#### Практичне заняття 2.

Лінійні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі і Ріккаті.

#### Лекція 3.

Задача Коші. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Теорема Пеано.

#### Практичне заняття 3.

Рівняння в повних диференціалах. Пошук інтегрального множника до рівняння Бернуллі. Пошук особливих розв'язків. Метод параметризації. Рівняння Лагранжа і Клеро.

#### **Лекція 4.**

Скалярні диференціальні рівняння вищих порядків. Зниження порядку рівняння.

#### **Практичне заняття 4.**

Зниження порядку рівнянь. Приклади рівнянь вищих порядків з фізики і розв'язування таких прикладів.

#### **Лекція 5.**

Лінійні ДР  $n$ -го порядку. Основні властивості лінійних однорідних рівнянь (ЛОР). Вронскіан, фундаментальна система розв'язків ЛОР. Формула Остроградського-Ліувілля. Формула Абеля.

#### **Практичне заняття 5.**

ЛОР зі сталими коефіцієнтами і звідні до них. Рівняння Ейлера. Рівняння Лагранжа. Рівняння Чебишова.

#### **Лекція 6.**

ЛОР зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера. Рівняння Ейлера. Властивості лінійних неоднорідних рівнянь (ЛНР). Принцип суперпозиції розв'язків. Метод варіації сталих (Лагранжа) розв'язку ЛНР.

#### **Практичне заняття 6.**

ЛОР вищих порядків. Формула Абеля. Метод варіації сталих (Лагранжа) розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь.

#### **Лекція 7.**

ЛНР зі сталими коефіцієнтами з правою частиною у вигляді квазіполінома. Системи ДР. Інтегрування систем методом виключення та інтегровних комбінацій.

#### **Практичне заняття 7.**

ЛНР зі сталими коефіцієнтами з правою частиною у вигляді квазіполінома. Приклади рівнянь даного типу з теорії коливань.

#### **Лекція 8.**

Системи лінійних ДР. Властивості лінійних однорідних систем (ЛОС). Фундаментальна система розв'язку ЛОС. Формула Остроградського-Ліувілля. Метод Ейлера для ЛОС зі сталими коефіцієнтами.

#### **Практичне заняття 8.**

Інтегрування ЛОС методом Ейлера.

#### **Лекція 9.**

Властивості лінійних неоднорідних систем (ЛНС). Принцип суперпозиції розв'язків ЛНС. Метод варіації довільних сталих (Лагранжа) у застосуванні до ЛНС. ЛНС зі сталими коефіцієнтами з правою частиною у вигляді квазіполінома.

#### **Практичне заняття 9.**

Інтегрування ЛНС методом варіації сталих. ЛНС зі сталими коефіцієнтами з правою частиною у вигляді квазіполінома. Приклади ЛНС з фізичних застосувань.

## **ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ II**

### **Лекція 10.**

Поняття стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості за Ляпуновим. Точка спокою системи. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Стійкість точки спокою двох лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

#### **Практичне заняття 10.**

Дослідження на стійкість за означенням. Стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца. Типи точок спокою системи, побудова фазових траєкторій. Фізична інтерпретація фазових траєкторій системи ДР зі сталими коефіцієнтами.

### **Лекція 11.**

Стійкість за першим наближенням. Фазовий портрет автономної системи рівнянь. Положення рівноваги.

#### **Практичне заняття 11.**

Дослідження на стійкість за першим наближенням. Пошук положень рівноваги, побудова фазових портретів. Приклад про положення рівноваги маятника. Стійка і нестійка рівновага.

### **Лекція 12.**

Операційне числення. Перетворення Лапласа, обернене перетворення. Властивості перетворень Лапласа (теореми про диференціювання і інтегрування оригіналу, про зображення згортки, запізнення, зміщення зображення тощо). Приклади. Застосування перетворень Лапласа до розв'язку лінійних ДР і систем зі сталими коефіцієнтами. Застосування до розв'язування інтегральних рівнянь типу Вольтерра.

#### **Практичне заняття 12.**

Пошук зображень і оригіналів. Застосування перетворень Лапласа до розв'язку лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами. Застосування перетворень Лапласа до розв'язку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами. Застосування до розв'язування інтегральних рівнянь типу Вольтерра. Метод інтеграла накладання. Операційний метод як потужний інструмент розв'язку задач фізики.

### **Лекція 13.**

Постановка лінійної крайової задачі (ЛКЗ). Інтегральне представлення розв'язку лінійної неоднорідної крайової задачі. Функція Гріна. Побудова функції Гріна для ЛКЗ з однорідними розщепленими крайовими умовами. Побудова функції Гріна для ЛКЗ з періодичними крайовими умовами.

#### **Практичне заняття 13.**

Розв'язання ЛКЗ. Приклади ЛКЗ з фізичних застосувань. Побудова функції Гріна у випадку розщеплених і періодичних крайових умов. Розв'язання крайових задач методом функцій Гріна.

### **Лекція 14.**

Спектральні крайові задачі. Задача Штурма-Ліувілля. Власні значення, власні функції. Основні властивості власних чисел і власних функцій регулярної задачі Штурма-Ліувілля. Приклади.

#### **Практичне заняття 14.**

Знаходження спектрів і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

## **9. Рекомендована література:**

### **Основні джерела:**

- 1). С.А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. Диференціальні та інтегральні рівняння. К., "Либідь", 2004.
- 2). А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.
- 3) С.А. Кривошея, Н.В. Майко, О.В. Сугакова Диференціальні рівняння: завдання для самостійної роботи студентів. ВПЦ «Київський університет», 2009.
- 4). А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. Диференціальні рівняння в прикладах і задачах. К., "Либідь", 2003.
- 5). Г.П. Головач, О.Ф. Калайда. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. К., "Техніка", 1997
- 6) R.K. Nagle, E.B. Saff, A.D. Snider. Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems. Addison-Wesley, 2012.