КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С. М. ГОЙСА, В. М. СТЕЦЮК

З А Г А Л Ь Н А Ф І З И К А

У ПРИКЛАДАХ, ЗАПИТАННЯХ І ВІДПОВІДЯХ

ЕЛЕКТРИКА І МАГНЕТИЗМ

Частина 2

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА

ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ
2021

УДК 537
ББК 22.33

Автори:

С. М. Гойса, В. М. Стецюк

Рецензенти:

д-р. фіз.-мат. наук, проф. Д. Д. Шека,
канд. фіз.-мат. наук, доц. В. П. Сохацький

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
(протокол № 16 від 27 травня 2021 року)

Загальна фізика у прикладах, запитаннях і відповідях. Електрика і магнетизм. Частина 2 : навчально-методична розробка / С. М. Гойса, В. М. Стецюк. – К., 2021. – 65 с.

Навчально-методична розробка містить запитання і відповіді, а також приклади розв'язування задач із розділу загальної фізики "Електрика та магнетизм". Дана робота покликана допомогти студентам більш глибоко опанувати лекційний матеріал, свідомо використовувати фізичні закони, знаходити відповіді на запитання, що виникають під час самостійного вивчення курсу, набути практичних навичок з розв'язування задач.

Для студентів фізичних та радіофізичних спеціальностей закладів вищої освіти. Може бути корисним учням і викладачам спеціалізованих шкіл і фізико-математичних ліцеїв.

© Гойса С. М., Стецюк В. М., 2021
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем, 2021

5. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ СИЛА АМПЕРА

5.1. Короткі теоретичні відомості

Згідно з положеннями класичної фізики джерелами магнітного поля є рухомі заряди та постійні електричні струми. Водночас з цим вони є також і об'єктами дії магнітного поля.

Рухомий заряд q, переміщуючись у вакуумі рівномірно зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, створює у просторі магнітне поле. Це поле характеризується індукцією $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left[\vec{\upsilon}\times\vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (5.1)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від заряду до точки спостереження, $\mu_0 \approx 1{,}2566\cdot 10^{-6}\,\frac{Гн}{м}$ – магнітна стала. При розв'язуванні задач зручно використовувати $\frac{\mu_0}{4\pi} \approx 10^{-7}\,\frac{Гн}{м}$.

Одиницею індукції магнітного поля в системі СІ є тесла $\left[Тл\right]$.

Електричний струм – це впорядкований рух заряджених частинок. Тому елемент струму $Id\vec{l}$ теж створює магнітне поле, індукція якого за законом Біо-Савара

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l}\times\vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (5.2)$$

$d\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює елементу довжини dl лінійного провідника, а напрям збігається з напрямком електричного струму I.

При розв'язуванні задач зручно використовувати вираз для модуля індукції $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\beta}{r^2}$, де β – кут між $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

У загальному випадку струми є об'ємними, тобто розподіленими по перерізу провідника. Елемент об'ємного струму $\vec{j}dV$ ($\vec{j}$ – густина струму) створює поле

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left[\vec{j}\times\vec{r}\right]}{r^3}dV. \qquad (5.2a)$$

Тобто лінійний елемент струму $Id\vec{l}$ еквівалентний об'ємному $\vec{j}dV$.

Оскільки постійний струм завжди тече по замкнутому контуру, то неможливо встановити вклад окремого елемента струму $Id\vec{l}$ у визначення повного магнітного

поля. Тому формула (5.2) є допоміжною і не може бути перевірена експериментально. Повне поле знаходиться інтегруванням виразу (5.2) по всьому контуру

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (5.3)$$

Для магнітного поля, як і для електричного, виконується принцип суперпозиції: індукція магнітного поля, що створюється магнітними полями з індукціями $\vec{B}_1, \vec{B}_2, ..., \vec{B}_n$, дорівнює сумі їхніх індукцій

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i . \qquad (5.4)$$

Відсутність магнітних зарядів у природі знайшла своє відображення у законі Гаусса для магнітного поля, який входить до системи рівнянь Максвелла

$$\oint_S \left(\vec{B} \cdot \vec{n}\right) dS = 0 \text{, або } \operatorname{div} \vec{B} = 0 , \qquad (5.5)$$

де $\vec{n}$ – орт у напрямку перпендикуляра до елемента поверхні dS.

Те, що магнітне поле є вихровим (соленоїдальним), відображено у законі повного струму: циркуляція вектора індукції магнітного поля $\vec{B}$ дорівнює сумі струмів I, що пронизують контур циркуляції L,

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \left(\vec{j} \cdot \vec{n}\right) dS = \mu_0 I \text{, або } \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} . \qquad (5.6)$$

При розв'язуванні задач контур циркуляції краще вибирати таким чином, щоб він, по-перше, лежав на одній із силових ліній магнітного поля. В такому разі скалярний добуток $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ у лівій частині можна замінити на звичайний, враховуючи паралельність $\vec{B}$ і $d\vec{l}$. По-друге, бажано, щоб значення індукції магнітного поля при обході контура не змінювалось. Це ще більше спрощує ліву частину закону повного струму – вона перетворюється на добуток $B \cdot L$ (L – довжина контура). Площа S, по якій проводиться інтегрування у правій частині закону повного струму, – це площа будь-якої поверхні, напнутої на контур L.

Рівняння (5.5) та (5.6) є основними рівняннями магнітостатичного поля у вакуумі.

Крім вектора індукції $\vec{B}$ магнітне поле характеризується векторним потенціалом $\vec{A}$, який пов'язаний з $\vec{B}$ співвідношенням

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} . \qquad (5.7)$$

Як і $\vec{B}$, векторний потенціал $\vec{A}$ визначається струмами (подібно до того, як в електростатиці напруженість $\vec{E}$ та потенціал φ визначаються зарядами)

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I_1 d\vec{l}_1}{r_{12}}, \text{ або } \vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_1 dV_1}{r_{12}}. \qquad (5.8)$$

У диференціальній формі

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \qquad (5.9)$$

Таким чином, якщо визначити векторний потенціал за формулами (5.8) або (5.9), то, використовуючи (5.7), можна знайти індукцію поля $\vec{B}$. Векторні рівняння (5.8) та (5.9) можна в декартовій системі координат розписати покомпонентно. Наприклад,

$$A_{2x} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j_{1x} dV_1}{r_{12}}, \text{ або } \nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x.$$

Ці рівняння ідентичні рівнянням для скалярного потенціалу φ. Тому при розв'язуванні деяких магнітостатичних задач можна скористатись аналогією між φ і компонентами $\vec{A}$ і перенести розв'язок електростатичної задачі в магнітостатику (приклади 5.16 та 5.17).

В загальному випадку на заряд q, що рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$ в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, діє сила Лоренца $\vec{F}_m$, яка направлена перпендикулярно до векторів $\vec{\upsilon}$ і $\vec{B}$ і визначається співвідношенням

$$\vec{F}_m = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right]. \qquad (5.10)$$

Якщо елемент струму $Id\vec{l}$ знаходиться у зовнішньому магнітному полі з індукцією $\vec{B}$, то на нього діє сила $d\vec{F}_A$, яка в системі СІ за законом Ампера дорівнює

$$d\vec{F}_A = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right], \qquad (5.11)$$

Закон Ампера є основним законом магнітостатики і відіграє таку ж роль, як і закон Кулона в електростатиці.

Оскільки кожний елемент струму породжує своє магнітне поле, то між ними виникає сила взаємодії

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2\left[d\vec{l}_2 \times \left[I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}\right]\right]}{r_{12}^{\ 3}}. \qquad (5.12)$$

де $d\vec{F}_{12}$ – сила, яка діє на елемент струму $I_2 d\vec{l}_2$ з боку елемента струму $I_1 d\vec{l}_1$; $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, проведений від першого елемента струму до другого. Рівняння (5.12) – закон Ампера в диференціальній формі.

5.2. Запитання та відповіді

5.2.1. *Магнітні поля, як і електричні, зручно графічно зображати силовими лініями. Чим принципово відрізняється картина силових ліній магнітного поля від картини силових ліній електричного поля?*

Електричні силові лінії починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних. Магнітних зарядів в природі не виявлено. Тому лінії індукції магнітного поля не мають ні початку, ні кінця. Вони або замкнуті, або йдуть на нескінченність.

Відмінності у картині силових ліній відображають той факт, що електростатичне поле потенціальне (безвихрове), а магнітостатичне – непотенціальне (вихрове).

5.2.2. *Для визначення наявності електричного поля в певній точці простору достатньо помістити в цю точку пробний заряд і виміряти силу, яка на нього діє. А як бути у випадку магнітного поля?*

Для виявлення магнітного поля можна скористатись, наприклад, плоским витком зі струмом. На такий виток у магнітному полі діятиме момент сил, який намагатиметься розвернути площину витка перпендикулярно до вектора індукції магнітного поля.

5.2.3. *В чому полягає фізичний зміст принципу суперпозиції магнітних полів окремих елементів струму? Чи можна його довести?*

Поле, яке створюється окремим елементом струму в певній точці простору, не залежить від полів, які створюються іншими елементами струму. Результуюче поле є векторною сумою полів всіх елементів струму.

Довести принцип суперпозиції неможливо. Цей принцип є узагальненням дослідних фактів.

5.2.4. *Згідно* (5.2) *індукція магнітного поля елемента струму при* $r \to 0$ *зростає до нескінченності, що позбавлено фізичного змісту. Дайте цьому пояснення.*

Справа в тому, що лінійних струмів в природі не існує, це ідеалізація. Будь-який провідник має скінченний переріз. Тому формулою (5.2) можна користуватись для розрахунку полів лише в тих випадках, коли відстані, на яких обчислюється поле, значно переважають розміри провідника. Інакше потрібно переходити від лінійних струмів $Id\vec{l}$ до об'ємних $\vec{j}dV$.

5.2.5. *Поясніть, чому у диференціальній формі* (5.2) *закон Біо-Савара неможливо перевірити експериментально.*

Неможливість експериментальної перевірки закону Біо-Савара випливає із неможливості ізолювати окремі елементи струму. Експериментально можна перевірити закон Біо-Савара лише в інтегральній формі (5.3).

5.2.6. *Виберемо довільну замкнуту поверхню S, яка знаходиться у магнітному полі з індукцією $\vec{B}$. Чому дорівнює середнє значення нормальної компоненти $\langle B_n \rangle$ вектора $\vec{B}$ до поверхні S?*

За означенням середнього $\langle B_n \rangle = \frac{1}{S}\oint_S B_n dS = \frac{1}{S}\int_V \operatorname{div}\vec{B}\, dV$, де V – об'єм, обмежений поверхнею S. Оскільки $\operatorname{div}\vec{B} \equiv 0$, то $\langle B_n \rangle = 0$.

5.2.7. *Чи може індукція магнітного поля визначатися наступними виразами*

а) $\vec{B} = a\left(y\vec{i} + 6z\vec{j}\right)$;

б) $\vec{B} = a\left(x\vec{i} + 2y\vec{j} - 5z\vec{k}\right)$;

в) $\vec{B} = ax\vec{i} + 3by\vec{j} + 4cz\vec{k}$,

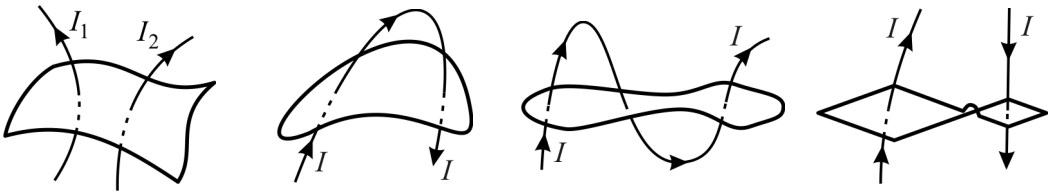
де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *– одиничні орти в декартовій системі координат;* a, b, c *– сталі?*

Для індукції магнітного поля має виконуватись закон Гаусса для магнітного поля (5.5). Отже, для виразу, наведеного у пункті а), $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ і таке поле може існувати. Для випадку б) існування такого поля неможливе, оскільки $\operatorname{div}\vec{B} \neq 0$. А для випадку в) це можливо за умови, що $a + 3b + 4c = 0$.

5.2.8. *Чим визначається циркуляція вектора індукції $\vec{B}$ по довільному замкнутому контуру?*

Циркуляція вектора $\vec{B}$ не залежить від вигляду контура і визначається лише сумарним струмом, який цей контур пронизує.

5.2.9. *Визначте циркуляцію індукції магнітного поля $\vec{B}$ вздовж контурів, наведених на* рис. 5.1. *Всі контури знаходяться у вакуумі.*



а) б) в) г)

Рис. 5.1. До запитання 5.2.9

За теоремою про повний струм (5.6) циркуляція вектора індукції магнітного поля вздовж довільного замкнутого контура визначається сумарним струмом, який цей контур перетинає. Тому для випадку

а) $\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I_1 + I_2\right)$;

б) $\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I + \left(-I\right)\right) = 0$ – тут один і той самий струм перетинає контур спочатку в одному напрямку, потім – у зворотному;

в) $\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$;

г) $\oint\limits_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 2I$, хоча здавалося б випадок повністю аналогічний до випадку б). Але потрібно зважити на те, що при послідовному русі вздовж контура нормаль до контура виявляється направленою спочатку вгору, а потім вниз, співпадаючи з напрямком струму.

5.2.10. *В магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ знаходиться замкнутий контур L. Визначте середнє значення $\langle B_l \rangle$ дотичної вектора $\vec{B}$ до контура.*

Дотична вектора індукції $\vec{B}$ співпадає за напрямком з елементом контура $d\vec{l}$, а отже є проекцією вектора $\vec{B}$ на напрям вектора $d\vec{l}$. Знайти цю проекцію можна через скалярний добуток $B_l = \left(\vec{B}\cdot d\vec{l}\right)$. За означенням середнього значення $\langle B_l \rangle = \frac{1}{l}\oint\limits_L \left(\vec{B}\cdot d\vec{l}\right)$, де l – довжина контура. Якщо контур не перетинає ніякий струм, то за законом повного струму $\oint\limits_L \left(\vec{B}\cdot d\vec{l}\right) = 0$ і $\langle B_l \rangle = 0$. Якщо контур пронизує струм I, то $\oint\limits_L \left(\vec{B}\cdot d\vec{l}\right) = \mu_0 I$ і тоді $\langle B_l \rangle = \frac{\mu_0 I}{l}$.

5.2.11. *Порівняйте поля, які створюються елементом струму і магнітним диполем. Поясніть характерні відмінності.*

За аналогією з електростатикою при вивченні магнітного поля вводиться поняття магнітного диполя. На практиці його моделлю може слугувати невеликий плоский замкнутий контур, по якому протікає струм. За рахунок того, що поле магнітного диполя складається з полів окремих антипаралельних елементів струму, індукція такого поля змінюється з відстанню як $1/r^3$. А поле окремого елемента струму спадає як $1/r^2$.

5.2.12. *В електростатиці скалярний потенціал φ задається з точністю до довільної константи C: $\varphi = \varphi' + C$. При цьому φ і φ' описують одне і те ж елект-*

ричне поле: $\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\varphi' = -\vec{E}$. *А як визначається векторний потенціал* $\vec{A}$ *у магнітостатиці?*

В магнітостатиці векторний потенціал задається з точністю до градієнта довільної скалярної функції ψ : $\vec{A} = \vec{A}' + \operatorname{grad}\psi$. При цьому $\vec{A}$ і $\vec{A}'$ описують одне і те ж магнітне поле. Справді, оскільки $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\psi) = 0$, то $\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A}' = \vec{B}$.

Зауважимо, що через невизначеність φ та $\vec{A}$ виміряти їх абсолютні значення неможливо.

5.2.13. *На* рис. 5.2 *зображено довільний контур* L, *який знаходиться у магнітному полі з індукцією* $\vec{B}$. *Чому дорівнює циркуляція векторного потенціалу* $\vec{A}$ *вздовж цього контуру?*

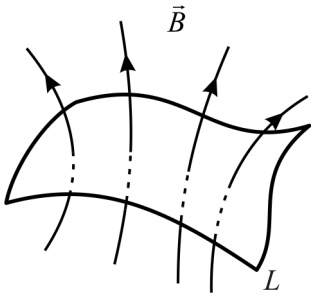


Рис. 5.2. До запитання 5.2.13

Відповідно до теореми Стокса циркуляція вектора $\vec{A}$ по довільному контуру L дорівнює потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{A}$ через довільну площу S, обмежену цим контуром.

Таким чином, $\oint\limits_L \vec{A}d\vec{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} = \int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \Phi_B$. Тобто результат дорівнює потоку вектора індукції $\vec{B}$ через цей контур.

5.2.14. *Позитивний заряд* q *рухається зі швидкістю* $\vec{\upsilon}$ (рис. 5.3). *Вказати напрямки та порівняти модулі магнітної індукції* $\vec{B}$ *та векторного потенціалу* $\vec{A}$ *в точках* 1 *та* 2, *координати яких задаються радіус-векторами* $\vec{r}_1$ *та* $\vec{r}_2$.

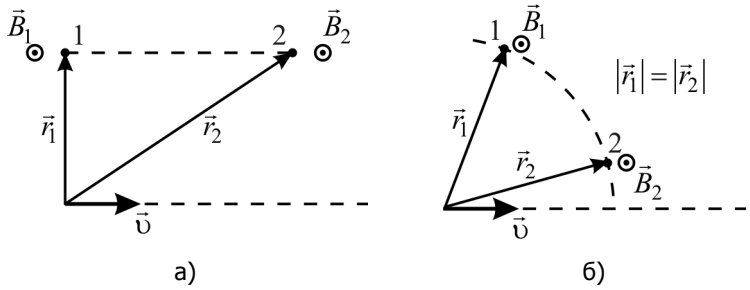


Рис. 5.3. До запитання 5.2.14

Поле та векторний потенціал рухомого заряду визначаються співвідношеннями

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left[\vec{\upsilon}\times\vec{r}\right]}{r^3} \text{ та } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\upsilon}}{r}.$$

Тому

а) $\left|\vec{B}_2\right| < \left|\vec{B}_1\right|$, $\left|\vec{A}_2\right| < \left|\vec{A}_1\right|$;

б) $\left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}_1\right|$, $\left|\vec{A}_2\right| = \left|\vec{A}_1\right|$.

Напрямок $\vec{A}$ збігається з напрямком $\vec{\upsilon}$. Напрямки $\vec{B}_1$ та $\vec{B}_2$ вказані на рисунку.

5.2.15. *Чи можна експериментально перевірити закон Ампера* (5.8) *для окремих елементів струму?*

Оскільки постійні струми завжди замкнуті і неможливо ізолювати окремі елементи струму, то і перевірити закон Ампера для них експериментально неможливо.

5.2.16. *На* рис. 5.4 *зображені два елементи струму. Чи виконується для них третій закон Ньютона?*

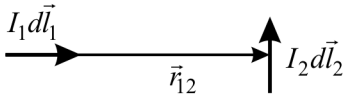


Рис. 5.4. До запитання 5.2.16

Сила, яка діє на елемент струму $I_2 d\vec{l}_2$ з боку елемента струму $I_1 d\vec{l}_1$, описується виразом $d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2\left[d\vec{l}_2\times\left[d\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}\right]\right]}{r_{12}^{\,3}}$. Вектори $d\vec{l}_1$ і $\vec{r}_{12}$ співнапрямлені, тому векторний добуток $\left[d\vec{l}_1\times\vec{r}_{12}\right] = 0$. Відповідно і $d\vec{F}_{12} = 0$.

Сила, яка діє на елемент струму $I_1 d\vec{l}_1$ з боку елемента струму $I_2 d\vec{l}_2$, описується виразом $d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 I_2\left[d\vec{l}_1\times\left[d\vec{l}_2\times\vec{r}_{21}\right]\right]}{r_{21}^{\,3}} \neq 0$.

Отже, в загальному випадку третій закон Ньютона для елементів струму не виконується $d\vec{F}_{12} \neq -d\vec{F}_{21}$. Це «порушення» третього закону Ньютона пов'язано з уявленням про сили взаємодії струмів як про сили попарної взаємодії їх елементів. Але постійні струми завжди замкнуті і використання третього закону Ньютона для елементів струму не є правомірним. Для замкнутих струмів він завжди виконується:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[d\vec{l}_2 \times \left[d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}\right]\right]}{r_{12}^{\ 3}} = -\oint_{L_1}\oint_{L_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left[d\vec{l}_2 \times \left[d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21}\right]\right]}{r_{21}^{\ 3}} = -\vec{F}_{21},$$ оскільки $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$.

5.2.17. *Плоский контур, по якому протікає струм I, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$* (рис. 5.5).

а) Чому дорівнює сила $\vec{F}_{12}$, яка діє на ділянку контура між точками 1 *та* 2 *з радіус-векторами $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$?*

б) Чому дорівнює сила, яка діє на весь контур?

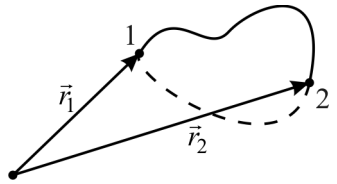


Рис. 5.5. До запитання 5.2.17

а) $\vec{F}_{12} = \int_1^2 I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right] = -I\left[\vec{B} \times \int_1^2 d\vec{l}\right] = I\left[\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{B}\right]$. Напрямок цієї сили визначається напрямком струму в контурі та шляхом переміщення з точки 1 в точку 2.

б) $\vec{F} = -I\left[\vec{B} \times \oint d\vec{l}\right] = 0$, оскільки $\oint d\vec{l} = 0$.

5.2.18. *Чому два паралельні провідники, по яким течуть струми в одному напрямку, притягуються, а два паралельні катодні промені відштовхуються?*

Провідники загалом є електронейтральними. Тому між ними діятиме тільки одна сила – сила притягання. Між катодними променями крім магнітної сили притягання F_m також діє відштовхуюча сила Кулона F_e. Їх відношення $F_e / F_m \sim c^2 / \upsilon^2$, де c – швидкість світла, υ – швидкість електронів у катодних променях. Оскільки $\upsilon < c$, то в катодних променях переважає сила відштовхування.

У прикладі 5.11 дається чисельна оцінка відношенню сил магнітної та електричної взаємодії.

5.2.19. *Через однорідний довгий циліндричний провідник пропускають струм. Чи можна вважати густину струму $\vec{j}$ однаковою в поперечному перерізі провідника?*

Струм, протікаючи по провіднику, створює в його середині магнітне поле. В результаті на рухомі вільні заряди буде діяти сила Лоренца, яка буде відхиляти їх в радіальному напрямку. Це призводить до порушення однорідності густини струму $\vec{j}$ в поперечному перерізі провідника і виникненню між його поверхнею та віссю

різниці потенціалів. Виявляється, що цей ефект дуже малий. Тому на практиці ним часто можна знехтувати і вважати густину струму однорідною.

5.2.20. *Плоский конденсатор, обкладки якого підключені до вольтметра, заповнили провідною рідиною. Конденсатор знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією* $\vec{B}$*, напрямок якої вказано на* рис. 5.6. *Що відбудеться, якщо рідину привести в рух вздовж обкладок конденсатора, перпендикулярно до* $\vec{B}$ *?*

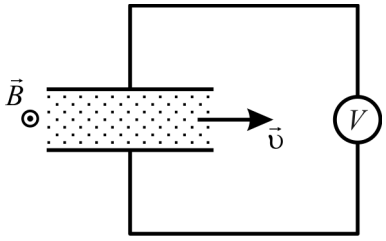


Рис. 5.6. До запитання 5.2.20

Коли рідина знаходиться у стані спокою, різниця потенціалів між обкладками дорівнює нулю. При створенні потоку на вільні носії заряду рідини (іони та електрони) у магнітному полі починає діяти сила Лоренца. Під її дією вільні заряди зміщуються до протилежних обкладок (відповідно до знаку заряду) і між обкладками виникає різниця потенціалів, яку реєструватиме вольтметр.

5.2.21. *Струм замикається на вертикальну спіраль, нижній кінець якої ледь занурений у провідну рідину (спіраль Роже),* рис. 5.7. *Як буде змінюватись стан спіралі та електричного кола з часом?*

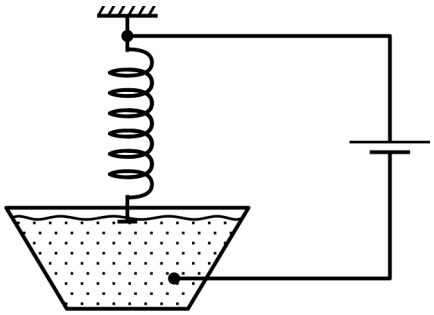


Рис. 5.7. До запитання 5.2.21

При протіканні струму через витки спіралі між останніми виникають сили притягання. В результаті спіраль стискається (скорочується), коло розмикається і струм припиняється. Коли струм припиняється спіраль під дією сили тяжіння починає розпрямлятись (подовжуватись) доти, доки її нижній кінець не торкнеться поверхні рідини. Коло знову замикається, знову в ньому потече струм і спіраль стиснеться, і т.д. Таким чином, спіраль буде здійснювати коливання.

5.2.22. *По провідному кільцю радіуса R починають пропускати струм. При збільшенні струму до величини I_0 кільце розривається.*

а) Поясніть причину розриву кільця.

б) Який струм розірве кільце з такого ж матеріалу, якщо його радіус збільшити у m разів?

в) Який струм розірве кільце такого ж радіусу, якщо його виготовити з матеріалу, гранична міцність якого в n разів більша?

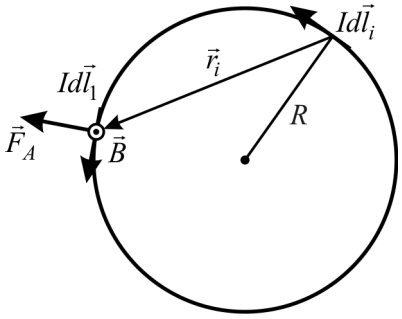


Рис. 5.8. До запитання 5.2.22

а) Розглянемо деякий елемент струму кільця $Id\vec{l}_1$ (рис. 5.8.). Інший довільний елемент кола $Id\vec{l}_i$ створює в місці розташування $Id\vec{l}_1$ магнітне поле, індукція якого $dB_i \sim \frac{I}{r_i^2} \sim \frac{I}{R^2}$ і направлена на читача. Неважко переконатись, що всі інші елементи струму кола створюють поле такого ж напрямку. За принципом суперпозиції на елемент $Id\vec{l}_1$ діятиме поле, індукція якого $B \sim \frac{I}{R^2}$. В результаті дії цього поля на елемент струму $Id\vec{l}_1$ виникає сила Ампера $\vec{F}_A$, яка направлена від центра цільця і намагається його розірвати.

б) Сила Ампера, яка діє на елемент струму кільця, $F_A \sim IB \sim \frac{I^2}{R^2}$. Тому при збільшені радіуса кільця у m разів для його розриву потрібно пропускати струм теж більший у m разів: $I = mI_0$.

в) Для кільця, виготовленого із матеріалу з більшою у n разів граничною міцністю, струм, необхідний для розриву, потрібно збільшити у $\sqrt{n}$ разів: $I = \sqrt{n}I_0$.

5.2.23. *Два концентричних кругових витка з радіусами R_1 та R_2 $(R_1 < R_2)$ виготовлені з м'якої тонкої дротини. По виткам течуть струми I_1 та I_2. Чи володіє така система стійкістю до радіальних деформацій витків?*

Якщо струми у витках течуть в однакових напрямках, то сили, що діють на внутрішній виток з боку власного струму I_1 (див. пит. 5.2.22) та струму I_2, направлені радіально від центра і, відповідно, цей виток стійкий. На зовнішній виток також діють радіально направлені сили: $\vec{F}_1$ (породжена струмом I_1), направлена до центра; та $\vec{F}_2$ (породжена струмом I_2), направлена від центра. Якщо $F_1 > F_2$, то зовнішній виток буде стискатись і виявиться нестійким до радіальної деформації. Якщо $F_2 > F_1$, то зовнішній виток розтягуватиметься і буде стійким.

Чи зміниться щось, якщо струми у витках течуть у протилежних напрямках? Спробуйте розібратись самостійно.

5.2.24. *Струм I тече по витку у формі кола радіуса R. Чому дорівнює момент сили $\vec{M}$, що діє на виток у зовнішньому однорідному магнітному полі з індукцією $\vec{B}$? Вектор $\vec{B}$ утворює кут α з нормаллю до площини витка.*

Магнітний момент $\vec{M} = \left[\vec{p}_m \times \vec{B}\right]$, де $p_m = I\pi R^2$ – магнітний момент витка. Тому $M = I\pi R^2 B \sin\alpha$.

5.2.25. *Провідна рамка знаходиться в однорідному магнітному полі* (рис. 5.9) *($\vec{n}$ – одиничний орт, перпендикулярний до площини рамки). Що відбуватиметься, якщо через рамку пропускати постійний струм? Як це можна використати на практиці?*

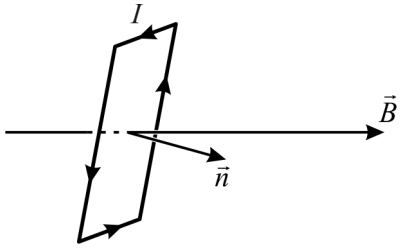


Рис. 5.9. До запитання 5.2.25

За даних умов на рамку діятиме сила Ампера, яка спричинятиме виникнення моменту сил. Момент сил намагатиметься розвернути рамку так, щоб орт $\vec{n}$ став паралельним до ліній магнітного поля.

На практиці цей ефект використовується, наприклад, у вимірювальних приладах, коли поворот стрілки на шкалі приладу пропорційний струму, який проходить по рамці, з'єднаній зі стрілкою.

5.2.26. *Рамку розмістили в неоднорідному магнітному полі як показано на* рис. 5.10 *($\vec{n}$ – одиничний орт, перпендикулярний до площини рамки). Що відбуватиметься з рамкою, якщо через неї пропускати постійний струм? Чим така ситуація відрізняється від випадку розміщення такої ж рамки в однорідному полі?*

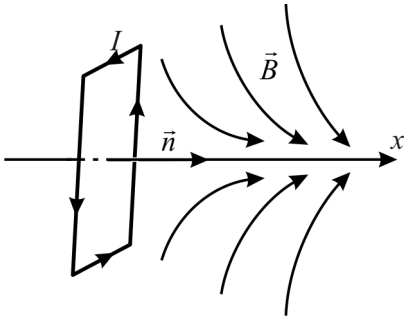


Рис. 5.10. До запитання 5.2.26

На рамку в неоднорідному полі діятиме сила $\vec{F} = \left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}$, де $\vec{p}_m$ – магнітний момент рамки. Вона буде намагатися втягнути рамку в область з максимальним значенням індукції магнітного поля. Тобто рамка почне рухатись вздовж осі X.

У випадку однорідного поля сили, що діють на рамку, взаємно компенсуються. Тому рамка буде залишатись нерухомою.

5.2.27. *Поблизу торця соленоїда розташовують виток зі струмом. Напрямок магнітного моменту витка збігається з віссю соленоїда. Що відбуватиметься з витком, якщо через соленоїд пропускати постійний струм, а орієнтацію магнітного моменту витка зберігати незмінною?*

Магнітне поле соленоїда поблизу його торця неоднорідне. Тому, якщо магнітний момент витка направлений в соленоїд (в напрямку поля на осі), то виток буде втягуватись в соленоїд. Якщо напрямок магнітного поля протилежний, то виток буде виштовхуватись.

5.2.28. *Два витка зі струмом знаходяться на відстані r, яка значно більша за їх лінійні розміри. Як залежить від r сила взаємодії між ними?*

Сила взаємодії $\vec{F} = \left(\vec{p}_m \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{B}$, де $\vec{B}$ – індукція магнітного поля, яке створюється одним із витків у місці розташування іншого, магнітний момент якого $\vec{p}_m$. Оскільки для витка $B \sim 1/r^3$, то $F \sim 1/r^4$.

5.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1. *Знайти індукцію магнітного поля $\vec{B}$, створеного відрізком провода довжиною $l = l_1 + l_2$, по якому протікає струм I, у точці A, що знаходиться на відстані R від прямої.*

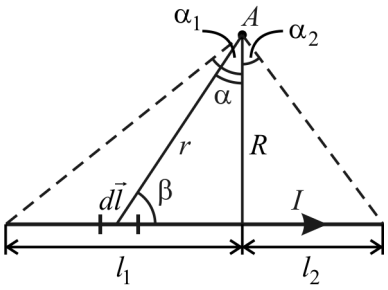


Рис. 5.11. До прикладу 5.1

Розв'язання. Виділимо на проводі довільний елемент струму $Id\vec{l}$ (рис. 5.11). В точці A такий елемент створює магнітне поле $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\beta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\cos\alpha}{r^2}$. Для знаходження повного поля, створеного відрізком провода, потрібно отриманий вираз проінтегрувати по всій довжині відрізка. Всі окремі елементи струму провода створюють поле одного напрямку. Тому векторну суму окремих $d\vec{B}$ можна замінити на звичайну алгебраїчну. До виразу для dB входять три взаємно залежні змінні (l, r, α). Приведемо підінтегральний вираз до однієї змінної. Як показує практика, у подібних задачах зручніше проводити інтегрування по куту – в цьому випадку вигляд підінтегрального виразу простіший. Для даної геометрії задачі $l = R \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$, звідки $dl = \frac{R}{\cos^2\alpha}d\alpha$ і $r = \frac{R}{\cos\alpha}$. Тоді $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha d\alpha}{R}$, а

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{I\cos\alpha}{R}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\left(\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\left(\frac{l_2}{\sqrt{R^2 + l_2^2}} + \frac{l_1}{\sqrt{R^2 + l_1^2}}\right).$$

У цьому виразі α_1 та α_2 – граничні кути для нашого відрізка ($\alpha \in [-\alpha_1; \alpha_2]$).

Для окремого випадку нескінченно довгого провідника ($l_1, l_2 \to \infty$, або $\alpha_1, \alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$.

Якщо $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, то $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$.

Крім знаходження значення модуля вектора індукції магнітного поля, потрібно також визначити його напрямок. Це зручно зробити, наприклад, за правилом свердлика.

Приклад 5.2. *Знайти індукцію магнітного поля $\vec{B}$ у центрі кривини кругового витка радіуса R, по якому протікає струм I.*

Розв'язання. Розглянемо більш загальний випадок знаходження індукції магнітного поля для дуги з центральним кутом α. Знову використаємо вираз для модуля $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\beta}{r^2}$. Врахуємо, що для елемента дуги $dl = Rd\alpha$, а її радіус завжди перпендикулярний до дотичної (тобто $\beta = \frac{\pi}{2}$). Тоді

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\alpha}\frac{I}{R}d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\alpha}{R}.$$

Для окремого випадку знаходження індукції магнітного поля в центрі кільця радіусу R зі струмом I маємо $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

Використовуючи розв'язки попередніх задач, комбінуючи їх, можна легко розв'язати багато інших завдань. При цьому не варто забувати, що індукція магнітного поля величина векторна, і складання кількох полів відбувається за правилами додавання векторних величин.

Приклад 5.3. *Знайти магнітну індукцію в точці O, якщо провідник зі струмом I має вигляд, показаний на* рис. 5.12.

Розв'язання. На рисунку чітко розділяються три частини провідника, магнітне поле кожної з яких легко можна визначити на основі попередніх задач.

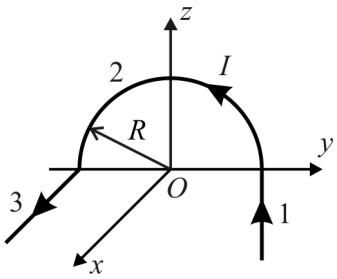


Рис. 5.12. До прикладу 5.3

Поле дуги 2 визначається виразом $B_2 = \frac{\mu_0 I}{4R}$. Поля відрізків 1 та 3 однакові за модулем, $B_1 = B_3 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}$, але відрізняються за напрямками. Поля $\vec{B}_1$ та $\vec{B}_2$ напрям-

лені вздовж осі OX, а поле $\vec{B}_3$ напрямлене вздовж осі OZ. Повне поле є суперпозицією полів окремих ділянок $B = \sqrt{(B_1 + B_2)^2 + B_3{}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\sqrt{(\pi+1)^2+1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\sqrt{\pi^2+2\pi+2}$. Результуючий вектор лежить у площині XZ і направлений під кутом $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{B_1+B_2}{B_3}\right)$ до осі OZ.

Приклад 5.4. *Знайти магнітне поле над довгою прямою стрічкою шириною $l = l_1 + l_2$, по якій тече струм I.*

Розв'язання. У цій задачі важко відразу вказати, куди буде направлено результуюче магнітне поле. В таких випадках зручно знаходити відповідь у вигляді проекцій вектора на координатні осі. З попереднього аналізу умови можна сказати, що вектор $\vec{B}$ лежить в площині XY. Тому наша задача зводиться до знаходження проекцій B_x та B_y.

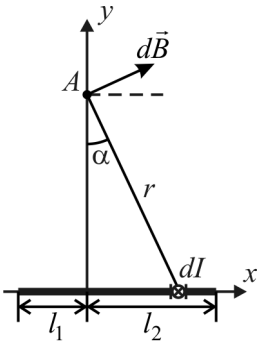


Рис. 5.13. До прикладу 5.4

Розділимо стрічку на смужки шириною dx. Струм у окремій смужці $dI = \frac{I}{l_1+l_2}dx$. Запишемо поле, що створюється такою смужкою, як поле нескінченно довгого провідника $dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{dx}{l}$.

Інтегрування проведемо по куту α (рис. 5.13). Як правило, при інтегруванні по куту підінтегральні вирази виходять найбільш простими. Кут α обмежується двома граничними кутами α_1 і α_2, значення яких можна знайти через ширину стрічки та ординату точки A. Представимо $x = y \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$ та $r = \frac{y}{\cos\alpha}$. Тоді $dx = \frac{y}{\cos^2\alpha}d\alpha$. Тепер вираз для індукції поля залежить лише від однієї змінної: $dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$.

Проекція вектора $d\vec{B}$ на вісь OX $dB_x = dB\cos\alpha$; на вісь OY $dB_y = dB\sin\alpha$.

Таким чином, $B_x = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{I}{l}d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}(\alpha_2 + \alpha_1)$,

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{I}{l}\frac{\sin\alpha d\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\ln\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}.$$

Якщо спрямувати $l \to \infty$ та ввести поняття лінійної густини струму $i = \frac{I}{l}$, то можна отримати вираз для магнітного поля над площиною, по якій протікає рівномірно розподілений струм. Для цього випадку $B_x = \frac{\mu_0 i}{2}$, а $B_y = 0$.

І навпаки, якщо спрямувати α_1 і α_2 до нуля та врахувати, що при цьому $r(\alpha_1 + \alpha_2) \approx l$, отримаємо поле лінійного провідника зі струмом: $B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B_y = 0$.

Приклад 5.5. *Соленоїд має довжину L і радіус поперечного перерізу R. Число витків на одиницю довжини n. Знайти індукцію магнітного поля на осі соленоїда, якщо струм у ньому дорівнює I.*

Розв'язання. Виділимо у соленоїді кільце шириною dx (рис. 5.14). Кількість витків зі струмом, що потрапляють у це кільце – ndx, а струм у кільці, відповідно, $Indx$.

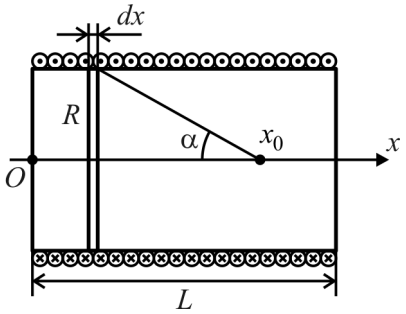


Рис. 5.14. До прикладу 5.5

Кільце на осі соленоїда у точці з координатою x_0 створюватиме магнітне поле з індукцією $dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2}{\left(R^2 + (x_0 - x)\right)^{3/2}}Indx$ (останній вираз можна отримати, розв'язавши окремо нескладну задачу про знаходження індукції магнітного поля на осі кільця зі струмом). У відповідності до позначень струму на рисунку напрям вектора $d\vec{B}$ співпадатиме з віссю OZ. Проінтегрувавши отриманий вираз по всій довжині соленоїда, можна отримати формулу для індукції магнітного поля у довільній точці на осі соленоїда.

Перетворимо підінтегральний вираз так, щоб інтегрування можна було провести по куту α: $x_0 - x = R \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$, звідки $dx = \dfrac{R}{\sin^2\alpha} d\alpha$; $R^2 + (x_0 - x)^2 = \dfrac{R^2}{\sin^2\alpha}$. Підінтегральний вираз набуває вигляду $dB = \dfrac{\mu_0}{2} In \cdot \sin\alpha d\alpha$.

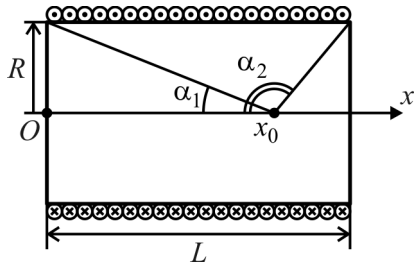


Рис. 5.15. До пояснення вибору меж інтегрування

Остаточно отримаємо $B = \dfrac{\mu_0 nI}{2} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \dfrac{\mu_0 nI}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$. Значення $\cos\alpha_1$ та $\cos\alpha_2$ можна визначити з рис. 5.15, знаючи геометричні параметри задачі – довжину соленоїда L, його радіус R, та координату x_0.

Частковим випадком отриманого розв'язку є вираз для індукції магнітного поля всередині нескінченно довгого соленоїда. Покладемо $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_1 = 0$ і отримаємо $B = \mu_0 nI$.

Приклад 5.6. *Струм I тече по довгому прямому провіднику і потім розтікається рівномірно в усіх напрямках у однорідному провідному середовищі. Знайти індукцію магнітного поля $\vec{B}$ в точці A, яка знаходиться на відстані r від точки O під кутом Θ* (рис. 5.16).

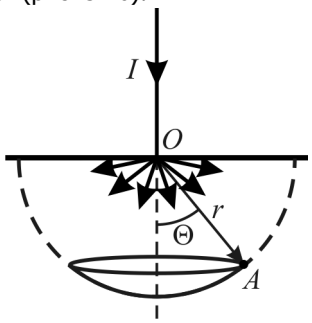


Рис. 5.16. До прикладу 5.6

Розв'язання. Проведемо півсферу радіуса r з центром в точці O. Струм від точки O розтікається в усіх напрямках рівномірно, тому можна ввести густину струму $j = \dfrac{I}{2\pi r^2}$. Візьмемо контур, що проходить через точку A і лежить на півсфері. Форма і розташування контуру обумовлені формою і розташуванням сило-

вих ліній магнітного поля. Для того, щоб пересвідчитись, що силові лінії проходять саме так, досить уявити картину струмів, що розходяться із точки O, подивившись назустріч струмові I. Оскільки елементарні струми течуть вздовж радіальних ліній виділеної півсфери, то за поверхню, напнуту на контур циркуляції, по якій буде проводитись інтегрування, зручніше вибрати поверхню сферичного сегмента з центральним кутом 2Θ.

Елемент площі в сферичній системі координат: $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Застосуємо закон повного струму: $B \cdot 2\pi r \sin\Theta = \mu_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\Theta} jr^2 d\varphi \sin\theta d\theta = \mu_0 I\left(1-\cos\Theta\right)$, звідси $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{1-\cos\Theta}{\sin\Theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}$.

Якщо $\Theta = 0$, то $B = 0$. При $\Theta = \frac{\pi}{2}$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (як у лінійного провідника зі струмом).

Інколи використати закон повного струму для розв'язування задачі важко через порушення симетрії. Це порушення може статися за рахунок наявності в умові задачі розрізів, порожнин і т.п. Методика знаходження відповіді у подібних випадках полягає в тому, що спочатку ці порожнини заповнюються двома струмами, рівними за величиною та протилежно спрямованими. Далі результуюче поле представляється у вигляді суперпозиції двох полів: поля, для знаходження якого вже можна застосувати закон повного струму, оскільки наш прийом дозволив відновити симетрію задачі; і поля додатково введеного струму, для знаходження якого можна застосувати будь-який з наведених раніше способів (у тому числі і закон повного струму).

Приклад 5.7. *Струм I тече вздовж довгої тонкостінної труби радіуса R, що має по всій довжині повздовжній проріз шириною h. Знайти індукцію магнітного поля всередині труби, якщо $h << R$.*

Розв'язання. Введемо два струми, що течуть по прорізу: напрямок одного збігається з напрямком I, а напрямок іншого – протилежний. Перший струм заповнить частину труби, якої не вистачало для симетрії. Далі із закону повного струму випливає, що магнітне поле всередині суцільної труби, по якій тече струм, дорівнює нулю. Тому поле всередині труби буде визначатися лише введеним нами струмом, що тече по прорізу у зворотній до I бік. Величина цього струму визначається виразом $I_h = \frac{I}{2\pi R}h$.

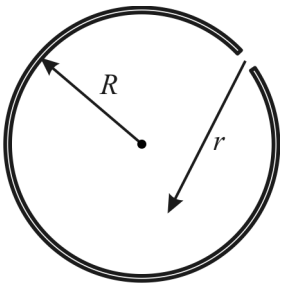


Рис. 5.17. До прикладу 5.7

Враховуючи, що $h << R$, поле всередині труби можна визначити як поле лінійного провідника із струмом: $B = \frac{\mu_0 I_h}{2\pi r} = \frac{\mu_0 Ih}{4\pi^2 Rr}$, де r – відстань від прорізу (рис. 5.17). Подібним способом можна знайти поле і за межами труби.

Приклад 5.8. *Точковий заряд q рухається із нерелятивістською швидкістю $\vec{\upsilon}$. У деякий момент в точці спостереження напруженість електричного поля цього заряду $\vec{E} = \vec{E}_0$, а кут між векторами $\vec{E}$ та $\vec{\upsilon}$ дорівнює α. Знайти індукцію $\vec{B}$ магнітного поля заряду в даній точці в цей момент.*

Розв'язання.

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left[\vec{\upsilon}\times\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{\upsilon}\times\frac{q\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}4\pi\varepsilon_0\left[\vec{\upsilon}\times\vec{E}\right] = \frac{1}{c^2}\left[\vec{\upsilon}\times\vec{E}\right]$, де враховано, що $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ (c – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі). $B = \frac{\upsilon}{c^2}E\sin\alpha$. Цей вираз дає простий зв'язок між електричним та магнітним полями, створеними рухомим зарядом.

Приклад 5.9. *Заряд q рівномірно розподілений по об'єму однорідної кулі масою m та радіуса R, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Знайти магнітний момент p_m кулі та його відношення до механічного моменту $\frac{p_m}{L}$ (гіромагнітне відношення).*

Розв'язання. Введемо об'ємну густину заряду $\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}$. Елемент об'єму у сферичній системі координат $dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi$. При обертанні кулі навколо своєї осі елемент dV описує правильні кільця. Таким чином, маємо впорядковане переміщення заряду, тобто струм. Величина цього струму $dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \rho\omega r^2 dr\sin\theta d\theta$. В свою чергу струм у витку створює магнітний

момент $dp_m = dI \cdot \pi\left(r\sin\theta\right)^2$. Інтегрування по всьому об'єму кулі дозволяє отримати вираз для повного магнітного моменту: $p_m = \pi\rho\omega\int_0^R r^4 dr\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\frac{\pi\rho\omega R^5}{5} = \frac{q\omega R^2}{5}$. Значення механічного моменту для кулі візьмемо з розділу загальної фізики "Механіка": $L = \frac{2}{5}mR^2\omega$. Тоді відношення $\frac{p_m}{L} = \frac{q}{2m}$.

Приклад 5.10. *Довгий діелектричний циліндр поляризований так, що в усіх його точках вектор поляризації* $\vec{P} = \alpha\vec{r}$, *де* α *– додатна стала,* r *– відстань від осі циліндра. Циліндр обертається з частотою* ω *навколо своєї осі. Знайти індукцію магнітного поля на осі циліндра.*

Розв'язання. Поляризація циліндра призводить до появи в ньому поляризаційних зарядів. Їх густина $\rho' = -\operatorname{div}\vec{P} = -2\alpha$. Оскільки діелектричний циліндр від самого початку був електронейтральним, то наявність об'ємного поляризаційного заряду призведе до появи на поверхні циліндра поверхневих зв'язаних зарядів, величину яких характеризують поверхневою густиною σ'. Цю густину можна визначити з граничних умов на поверхні діелектрика. Зокрема, для вектора поляризації $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$. Оскільки за межами циліндра поляризаційних зарядів немає і сам вектор поляризації направлений по нормалі до поверхні циліндра, то отримаємо $\sigma' = P\left(R\right) = \alpha R$.

Наявність об'ємних та поверхневих зарядів при обертання циліндра призводить до появи об'ємних та поверхневих струмів, які, в свою чергу, викличуть появу магнітного поля на осі циліндра. Розрахуємо вклад об'ємних та поверхневих поляризаційних зарядів у створене магнітне поле окремо.

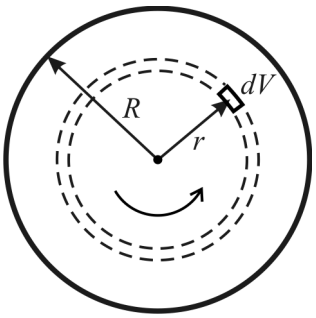


Рис. 5.18. До прикладу 5.10

Елемент об'єму у циліндричній системі координат $dV = rdrd\varphi dz$. Струм, що з'являється в результаті обертання такого елементарного об'єму навколо осі цилін-

дра, $dI_{об} = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho' dV}{dt} = \rho'\omega r dr dz = -2\alpha\omega r dr dz$. Із подібних витків утворюється циліндричний шар товщиною dr (рис. 5.18), який можна розглядати як соленоїд із струмом на одиницю довжини циліндра $\frac{dI_{об}}{dz} = -2a\omega r dr$. У прикладі 5.5 ми отримали вираз для індукції магнітного поля на осі довгого соленоїда ($B = \mu_0 nI$, де $nI = \frac{NI}{L}$ – струм на одиницю довжини соленоїда). В нашій задачі маємо $dB_{об} = \mu_0 \frac{dI_{об}}{dz} = -2\mu_0\alpha\omega r dr$. Тоді $B_{об} = -2\mu_0\alpha\omega\int_0^R r dr = -\mu_0\alpha\omega R^2$.

Для поверхневих зарядів $dI_{пов} = \frac{\sigma' dS}{dt} = \sigma'\omega R dz = \alpha\omega R^2 dz$. На одиницю довжини циліндра $\frac{dI_{пов}}{dz} = \alpha\omega R^2$. На осі циліндра такий струм створює магнітне поле $B_{пов} = \mu_0\alpha\omega R^2$.

Загальне поле, з урахуванням поверхневих і об'ємних струмів $B = B_{пов} + B_{об} = 0$.

Приклад 5.11. *Два протона рухаються паралельно один до одного з однаковою швидкістю* $300\frac{км}{с}$. *Знайти відношення сил магнітної та електричної взаємодії цих протонів.*

Розв'язання. Сила магнітної взаємодії $\vec{F}_m = e\left[\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right] = e\left[\vec{\upsilon}\times\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\left[\vec{\upsilon}\times\vec{r}\right]}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2}{r^3}\left[\vec{\upsilon}\times\left[\vec{\upsilon}\times\vec{r}\right]\right]$. Використаємо властивості векторного добутку: $\left[\vec{\upsilon}\times\left[\vec{\upsilon}\times\vec{r}\right]\right] = \left\{\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon})\right\}$. Перший доданок дорівнює нулю. Тому $\vec{F}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^2\upsilon^2}{r^3}\vec{r}$.

Сила електричної взаємодії: $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^3}\vec{r}$.

Відношення модулів двох сил $\frac{F_m}{F_e} = \varepsilon_0\mu_0\upsilon^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2} = \left(\frac{300}{300000}\right)^2 = 10^{-6}$. Цей результат типовий: магнітна сила стає порівняною з електричною лише для швидкостей, близьких до швидкості світла

Приклад 5.12. *Точковий заряд* q *рухається з постійною нерелятивістською швидкістю* $\vec{\upsilon}$ *вздовж нескінченного лінійного провідника зі струмом* I. *Довести,*

що сила, яка діє на заряд з боку лінійного струму, дорівнює силі, з якою заряд діє на лінійний струм.

Розв'язання. В магнітному полі лінійного струму на заряд q буде діяти сила Лоренца $\vec{F}_1 = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}_1\right]$ (рис. 5.19а). З урахуванням виразу для індукції поля лінійного струму $B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$ сила $F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q\upsilon I}{r}$. Напрям дії сили залежатиме від знаку заряду. Якщо $q > 0$, то заряд буде притягуватись до провідника.

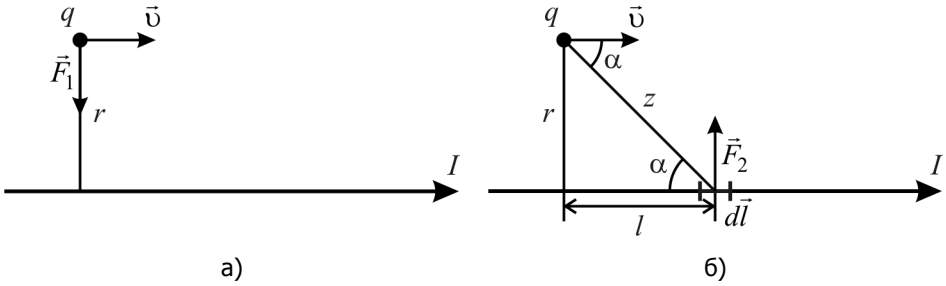


Рис. 5.19. До прикладу 5.12

Виділимо довільний елемент струму $Id\vec{l}$ (рис. 5.19б). У місці його розташування рухомий заряд q створює магнітне поле $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{z}\right]}{z^3}$. Модуль індукції поля $B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon \sin\alpha}{z^2}$. Сила Ампера, що діє на елемент струму $Id\vec{l}$: $d\vec{F}_2 = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}_2\right]$. Модуль сили $dF_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon \sin\alpha}{z^2} Idl$. Щоб знайти повну силу Ампера останній вираз потрібно проінтегрувати по всій довжині провідника. Інтегрування проведемо по куту α. Для цього виконаємо заміни: $l = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha \Rightarrow dl = -\frac{r}{\sin^2\alpha}d\alpha$; $z = r/\sin\alpha$. Тоді $dF_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon I}{r}\sin\alpha\, d\alpha$. Після інтегрування $F_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\upsilon I}{r}\int_{\pi}^{0}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{q\upsilon I}{r}$. Сила F_2 напрямлена до заряду q. Таким чином, третій закон Ньютона виконується: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Приклад 5.13. *Плоский конденсатор з площею пластин S та відстанню між ними d помістили в потік провідної рідини з питомим опором ρ. Рідина тече зі швидкістю υ паралельно до пластин. Система знаходиться в однорідному магнітному полі. Вектор $\vec{B}$ паралельний до пластин та перпендикулярний до $\vec{\upsilon}$. Плас-*

тини замкнули на опір R. Знайти потужність, що виділяється на R. При якому R вона максимальна? Чому вона дорівнює?

Розв'язання. В магнітному полі на вільні заряди рідини буде діяти сила Лоренца $\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right]$, яка приведе до зміщення зарядів у напрямку, перпендикулярному до пластин. Це, в свою чергу, викличе появу електричного поля $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right]$. Між пластинами виникне різниця потенціалів $U = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = \upsilon B d$ (ефект Холла). У колі потече струм $I = \frac{\upsilon B d}{R + \frac{\rho d}{S}}$. Потужність, що виділиться на зовнішньому опорі, $P = I^2 R = \frac{\upsilon^2 B^2 d^2 R}{\left(R + R_p\right)^2}$, де $R_p = \frac{\rho d}{S}$ – опір рідини між пластинами. Досліджуючи залежність $P(R)$ на екстремум, отримаємо $R = R_p$, а $P_{\max} = \frac{\upsilon^2 B^2 S d}{4\rho}$.

Приклад 5.14. *Вздовж довгого тонкостінного циліндра радіуса R протікає струм I. Який тиск відчувають стінки циліндра?*

Розв'язання. За теоремою про циркуляцію вектора $\vec{B}$ поле всередині такого циліндра дорівнює нулю, а ззовні – $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}$.

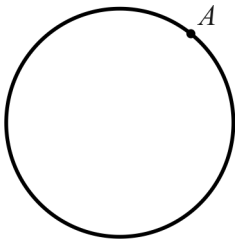


Рис. 5.20. До прикладу 5.14

Лінійна густина струму в точці A (рис. 5.20): $I_1 = \frac{I}{2\pi R}$. На цей струм діє сила Ампера з боку магнітного поля, створеного всім іншим циліндром. Знайдемо індукцію цього поля. Магнітне поле поблизу точки A можна представити як суперпозицію двох полів: поля, створюваного струмом I_1 – B_A, і поля, створюваного всім іншим циліндром – $B_ц$. Таким чином, маємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \text{біля точки } A \text{ ззовні циліндра:} & B_A + B_ц = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R} \\ \text{біля точки } A \text{ всередині циліндра:} & B_A - B_ц = 0 \end{cases}$$

Звідси $B_ц = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}$. Тоді на

струм в точці A діє сила $dF_A = I_1 B_ц l$ (l – висота циліндра). Для знаходження повної сили, що діє на стінки циліндра, проінтегруємо $F_A = \int dF_A = IB_ц l$. Тиск $P = \dfrac{F_A}{2\pi R \cdot l} = \dfrac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$. Цікаво відзначити, що розглянутий у задачі ефект – стискання провідника зі струмом його власним полем – використовується для утримання плазми в установках для керованого термоядерного синтезу.

Приклад 5.15. *Невеликий виток зі струмом знаходиться на відстані r від довгого прямого провідника, по якому тече струм I. Магнітний момент витка $\vec{p}_m$. Знайти модуль та напрям сили, що діє на виток, якщо вектор $\vec{p}_m$:*

а) паралельний до провідника зі струмом (рис. 5.21а)*;*

б) направлений вздовж $\vec{r}$ (рис. 5.21б)*;*

в) співпадає за напрямом з вектором $\vec{B}$ магнітного поля, що створюється струмом I (рис. 5.21в).

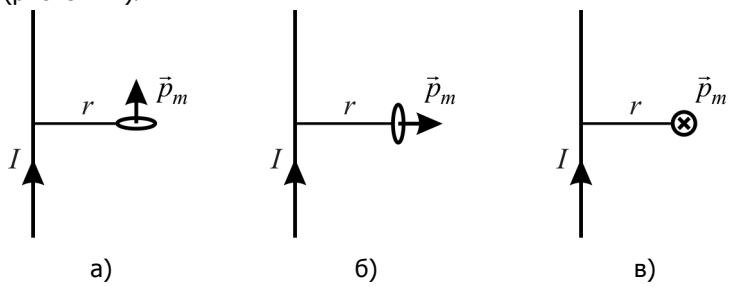


Рис. 5.21. До прикладу 5.15

Розв'язання. Загальна формула для сили, що діє на магнітний диполь в неоднорідному магнітному полі :

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}_m \vec{B}) = \left(\vec{p}_m \nabla\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\nabla\right)\vec{p}_m + \left[\vec{p}_m \times \mathrm{rot}\,\vec{B}\right] + \left[\vec{B} \times \mathrm{rot}\,\vec{p}_m\right].$$

Враховуючи, що $\vec{p}_m = const$, а $\mathrm{rot}\,\vec{B}$ в точці, де знаходиться диполь, дорівнює нулю, отримаємо

$$\vec{F} = \left(\vec{p}_m \nabla\right)\vec{B}.$$

Вектор $\vec{B}$ можна представити у вигляді двох складових: паралельної до вектора $\vec{p}_m$ та перпендикулярної до нього: $\vec{B} = \vec{B}_{\|} + \vec{B}_{\perp}$. Тоді скалярний добуток $\left(\vec{p}_m \vec{B}\right) = \left(\vec{p}_m \vec{B}_{\|}\right) = p_m B_{\|}$, і сила, що діє на диполь, буде визначатися зміною складової магнітного поля $\vec{B}_{\|}$ при переміщенні вздовж напрямку $\vec{p}_m$: $\vec{F} = p_m \dfrac{\partial \vec{B}_{\|}}{\partial l}$.

а) силові лінії магнітного поля довгого провідника представляють собою коаксіальні кільця, геометричні центри яких лежать на осі провідника. Тобто для такого поля характерна осьова симетрія – величина поля однакова у точках, рівновіддалених від провідника. Тому при переміщенні вздовж вектора $\vec{p}_m$ $\frac{\partial \vec{B}_{||}}{\partial l} = 0$. А отже і $F = 0$.

б) для довгого прямого провідника $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$. Тоді $F = p_m \frac{\partial B}{\partial r} = -p_m \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r^2}$. З рис. 5.22 видно, що зростання r призводить до зменшення величини магнітного поля B. Тому $\Delta\vec{B}$ направлено в бік, протилежний до вектора індукції $\vec{B}$. Відповідно і сила $\vec{F}$ протилежна за напрямом до $\vec{B}$.

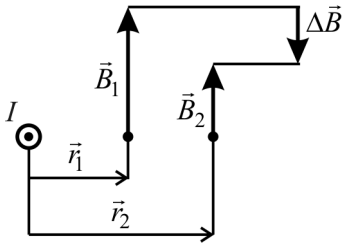


Рис. 5.22. До прикладу 5.15

в) в цьому випадку вектор індукції $\vec{B}$ змінюється не за величиною, а за напрямком (рис. 5.23). Зміна $\Delta B = B\Delta\alpha$ спрямована до центра кривини силової лінії. Тоді $F = p_m \frac{\partial B}{\partial l} = p_m \frac{\partial B}{r\partial\alpha} = p_m \frac{B}{r} = p_m \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r^2}$. Відповідь виходить така ж, як і в пункті б), лише $\vec{F}$ направлена до осі провідника.

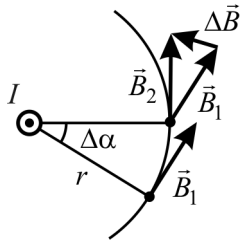


Рис. 5.23. До прикладу 5.15

Приклад 5.16. *Використовуючи аналогію з електростатичною задачею, визначити, спочатку, векторний потенціал $\vec{A}$, який створює струм, що протікає по нескінченній площині* (рис. 5.24). *А потім – індукцію магнітного поля $\vec{B}$. Лінійна густина струму $\vec{i}$.*

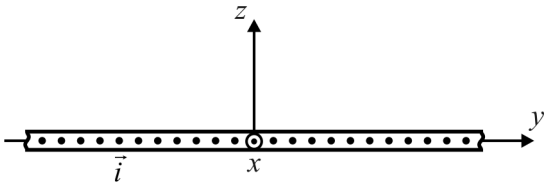


Рис. 5.24. До прикладу 5.16

Розв'язання. Аналогом цієї задачі є електростатична задача про поле, яке створюється над площиною, рівномірно зарядженою з поверхневою густиною заряду σ. В магнітостатиці роль σ відіграє лінійна густина струму $\vec{i}$, а роль потен-

ціалу φ – векторний потенціал $\vec{A}$. Таким чином, маючи розв'язок електростатичної задачі, можна відразу, за аналогією, написати розв'язок задачі магнітостатичної.

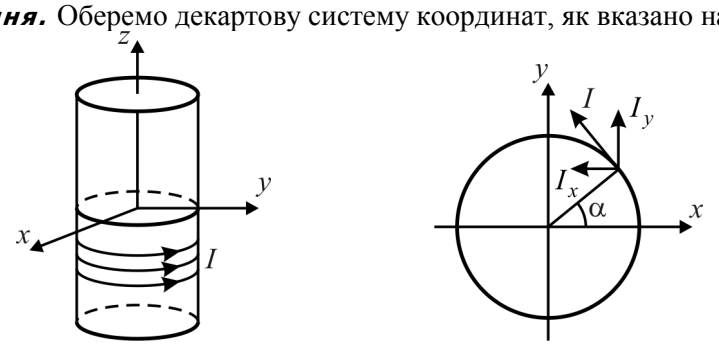
Поле, яке створює рівномірно розподілений по площині заряд $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$, де $\vec{k}$ – орт в напрямку осі OZ. Відповідний потенціал $\varphi = -\int \vec{E}d\vec{z} = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}$.

За аналогією $A = -\frac{\mu_0 iz}{2}$. Оскільки $A_y = A_z = 0$ (струм тече у напрямку осі OX, тобто $i_z = i_y = 0$), то $A_x \equiv A = -\frac{\mu_0 iz}{2}$.

Вектор магнітної індукції $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Отже $B_x = B_z = 0$, $B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{\mu_0 i}{2}$. Таким чином, $\vec{B} = B_y\vec{j} = -\frac{\mu_0 i}{2}\vec{j}$, де $\vec{j}$ – орт у напрямку осі OY.

Приклад 5.17. *Визначити векторний потенціал $\vec{A}$ всередині довгого соленоїда, а за його допомогою – індукцію магнітного поля $\vec{B}$. Струм у соленоїді I, кількість витків на одиницю довжини соленоїда – n.*

Розв'язання. Оберемо декартову систему координат, як вказано на рис. 5.25а.



а) б)

Рис. 5.25. До прикладу 5.17

У цій системі координат струм циркулює у площині XY (рис. 5.25б). Представимо його у вигляді двох компонент: $I_x = -In\sin\alpha$, $I_y = In\cos\alpha$. Компонента I_x визначає $x-$складову векторного потенціалу A_x, а I_y – $y-$складову A_y. $A_z = 0$, оскільки струм вздовж осі OZ не тече.

Для визначення A_x та A_y скористаємось аналогією між компонентами векторного потенціалу та скалярним потенціалом φ. Результат для A_x буде відповідати електростатичному потенціалу φ всередині циліндра, поверхня якого заряджена за законом $\sigma = -\sigma_0 \sin\alpha$. Поле всередині такого циліндра є однорідним і визначається як $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{j}$, де $\vec{j}$ – орт у напрямку осі OY. Відповідний потенціал $\varphi = -\int \vec{E}d\vec{y} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}y$. Вираз для векторного потенціалу можна отримати, врахувавши аналогію між поверхневою густиною заряду в електростатиці і лінійною густиною струму в магнітостатиці. Отже $A_x = -\frac{\mu_0 In}{2}y$ (In – струм на одиницю довжини соленоїда).

Аналогічно для A_y еквівалентною є задача про потенціал всередині циліндра, який заряджений за законом $\sigma = \sigma_0 \cos\alpha$. Тоді $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{i}$, де $\vec{i}$ – орт у напрямку осі OX. $\varphi = -\int \vec{E}d\vec{x} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}x$, а отже $A_y = \frac{\mu_0 In}{2}x$.

Таким чином векторний потенціал $\vec{A} = \frac{\mu_0 In}{2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$. Підставляючи A_x, A_y та A_z у формулу (5.7), отримаємо $B_x = 0$; $B_y = 0$; $B_z = \mu_0 In$. Отже, $\vec{B} = \mu_0 In\vec{k}$, де $\vec{k}$ – орт у напрямку осі OZ.

Приклад 5.18. *Заряд q знаходиться на відстані r від дуже довгої нитки, зарядженої рівномірно з лінійною густиною заряду λ. В інерціальній системі відліку S вони нерухомі. Визначити сили взаємодії між зарядом та ниткою в інерціальній системі відліку S', яка рухається зі швидкістю υ відносно системи відліку S.*

Розв'язання. Оберемо систему координат, як вказано на рис. 5.26.

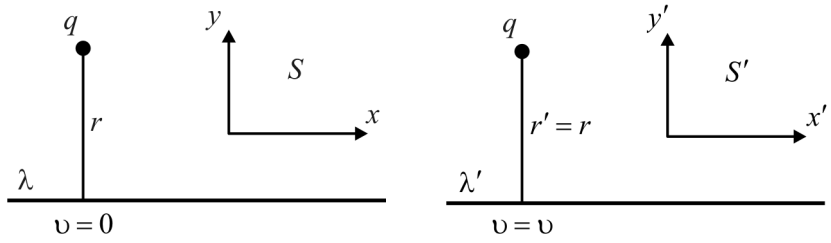


Рис. 5.26. До прикладу 5.18

Якщо заряди нерухомі (система відліку S), то взаємодія між ними описується законом Кулона $F_k = qE = q\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$. Інших сил взаємодії немає.

В системі S', у якій заряди рухаються, закону Кулона недостатньо для опису їх взаємодії, оскільки рух зарядженої нитки еквівалентний протіканню лінійного струму I'.

Сили в системі діють вздовж осі $Y(Y')$. Оскільки рух зарядів відбувається у напрямку, перпендикулярному до цієї осі, то $r = r'$. Повний заряд нитки при переході від однієї системи до іншої зберігається як інваріант. Тоді лінійні густини заряду у двох системах пов'язані як $\lambda x = \lambda' x'$, де λ, λ' – лінійні густини заряду нитки, а x, x' – її довжина в системах відліку S та S', відповідно.

За релятивістським скороченням $x' = x\sqrt{1-\beta^2}$, де $\beta = \upsilon/c$ (c – швидкість світла у вакуумі). Тому $\lambda' = \lambda\dfrac{x}{x'} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Тобто сила кулонівської взаємодії у системі відліку S' змінюється і дорівнює $F_k{}' = q\dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'} == \dfrac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{F_k}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Струм $I' = \lambda'\upsilon = \dfrac{\lambda\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}$ створює магнітне поле, яке діятиме на заряд q в системі відліку S' із силою $\vec{F}_m{}' = q\left[\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right] = q\upsilon\dfrac{\mu_0 I'}{2\pi r}$ (сила Лоренца). Взаємодія між зарядом та ниткою носитиме характер притягання $F_m{}' = \dfrac{\mu_0 q\upsilon}{2\pi r}\dfrac{\lambda\upsilon}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Сумарна сила взаємодії між зарядом та ниткою в системі відліку S' (за умови, що знаки зарядів однакові) становить

$$F' = F_k{}' - F_m{}' = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\mu_0 q}{2\pi r}\frac{\lambda\upsilon^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = F\sqrt{1-\beta^2},$$

де $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$.

Відношення магнітної складової сили взаємодії до електричної $F_m{}'/F_k{}' = \upsilon^2/c^2$, тобто магнітна складова сили, зазвичай, значно менша за електричну.

Приклад 5.19. *По двох довгих паралельних лінійних провідниках, відстань між якими r, в одному напрямку протікає струм I. В інерціальній системі відліку*

S, у якій провідники знаходяться у стані спокою, дрейфова швидкість електронів провідності дорівнює υ. Вважаючи, що в системі відліку S провідники нейтральні, визначити сили, які діють між ними в інерціальній системі відліку S', яка рухається зі швидкістю υ відносно системи відліку S. Довжина провідників в системі S дорівнює l.

Розв'язання. Оберемо систему координат, як вказано на рис. 5.27.

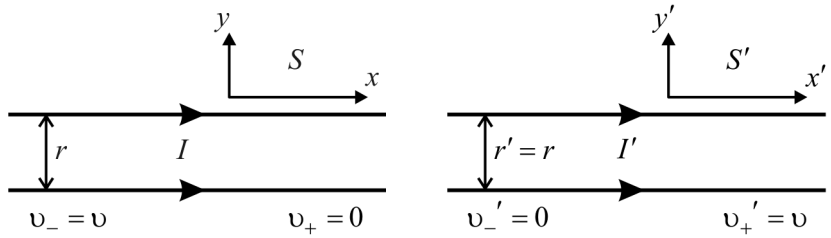


Рис. 5.27. До прикладу 5.19

Позначимо лінійні густини іонів та електронів як λ_+ та λ_- відповідно. Сумарний заряд іонів (електронів) дорівнює q і є інваріантною величиною. В силу нейтральності провідників в системі відліку S $\lambda_+ = |\lambda_-| = \lambda_0$. Струм $I = \lambda_0 \upsilon$.

При переході в систему відліку S' лінійні густини заряду іонів та електронів змінюються. В системі відліку S' іони рухаються зі швидкістю υ і їх лінійна густина заряду $\lambda_+' = \dfrac{\lambda_+}{\sqrt{1-\beta^2}}$, де $\beta = \upsilon/c$, c – швидкість світла у вакуумі (див. приклад 5.18). А електрони в системі відліку S' перебувають у стані спокою. Тому лінійна густина заряду електронів $\lambda_-' = \lambda_- \sqrt{1-\beta^2}$. Сумарна лінійна густина заряду провідників у системі відліку S' $\lambda' = \lambda_+' + \lambda_-' = \lambda_0 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2} \right) = \lambda_0 \dfrac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Отже, тепер $\lambda_+' \neq |\lambda_-'|$, тобто провідники перестають бути електронейтральними і між ними виникає кулонівська сила відштовхування $F_k' = \lambda' l' \cdot \dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'} = \dfrac{\lambda_0^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r} \dfrac{\beta^4}{\sqrt{1-\beta^2}}$, де l' – довжина провідників у системі відліку S', $\dfrac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r'}$ – електричне поле, яке створюється одним із провідників у місці розташування іншого. Внаслідок релятивістського скорочення $l' = l\sqrt{1-\beta^2}$, а $r' = r$, оскільки система відліку S' рухається

перпендикулярно до осі Y. За струм в цій системі відповідають іони, тому $I' = \lambda_+{}'\upsilon = \dfrac{I}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

В системі S між провідниками діяла лише одна сила – магнітна сила притягання (сила Ампера) $F = F_m = \dfrac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}$.

В системі ж S' маємо дві сили: силу відштовхування $F_k{}'$ і магнітну силу притягання $F_m{}' = \dfrac{\mu_0 I'^2 l'}{2\pi r} = \dfrac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2} = \dfrac{F}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Перепишемо вираз для $F_K{}'$:

$$F_k{}' = \frac{\lambda_0{}^2 l}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\upsilon^2}{c^2}\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mu_0\lambda_0{}^2\upsilon^2 l}{2\pi r}\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi r}\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = F\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Результуюча сила $F' = F_m{}' - F_k{}' = F\sqrt{1-\beta^2}$.

Таку ж відповідь ми отримали б, використовуючи перетворення сил при переході із однієї інерціальної системи відліку в іншу.

6. МАГНЕТИКИ

6.1. Короткі теоретичні відомості

Сучасна класифікація магнетиків достатньо складна і вимагає окремого вивчення. У даному розділі ми розглянемо питання які стосуються властивостей трьох основних класів магнетиків, які вивчаються у курсі «Електрика та магнетизм»: діа-, пара- та феромагнетиків.

Величиною, яка характеризує спроможність магнетиків намагнічуватись, є магнітна проникність μ, або магнітна сприйнятливість χ. Саме за цими величинами, які у загальному випадку залежать від зовнішнього поля, температури та будови речовини, магнетики поділяються на три основні класи:

1. *Діамагнетики*. У діамагнетиків $\chi < 0$ $\left(|\chi| << 1\right)$, тому вони намагнічуються проти поля $\left(\mu < 1\right)$. Залежності магнітних властивостей від температури немає. За відсутності зовнішнього магнітного поля $\chi = 0$.

2. *Парамагнетики*. Для парамагнетиків $\chi > 0$. Із збільшенням температури магнітна сприйнятливість зменшується. За відсутності зовнішнього магнітного поля $\chi = 0$.

3. *Феромагнетики*. В певному діапазоні значень напруженості магнітного поля $\mu, \chi >> 1$ $\left(\sim 10^4 \div 10^5\right)$. Феромагнетики мають намагніченість навіть за відсутності зовнішнього поля, тому нульова сприйнятливість у них не визначена. Залежність від величини магнітного поля має складний характер. Спостерігається магнітний гістерезис, тобто намагніченість феромагнетика залежить від напруженості магнітного поля, в якому зразок знаходився до цього. Остання властивість робить можливим існування постійних магнітів, які зберігають намагніченість і за відсутності зовнішнього поля. Феромагнітні властивості проявляються лише за температур, які нижчі від температури Кюрі T_C. Вище цієї температури феромагнетик перетворюється на парамагнетик, для якого магнітна сприйнятливість зменшується з ростом температури за законом Кюрі-Вейсса: $\chi \sim \dfrac{1}{T - T_C}$.

З класичної точки зору магнетизм речовини пояснюється наявністю у ній молекулярних струмів. З цієї точки зору молекулярні струми $I_{мол}$ є об'єктами дії зовнішнього поля та його джерелами (як і звичайні струми провідності $I_{пр}$).

Намагнічування речовини у зовнішньому полі характеризують намагніченістю $\vec{J}$ (порівняйте із вектором поляризації $\vec{P}$ для діелектриків), який визначається як магнітний момент одиниці об'єму речовини. Для ізотропних діелектриків, які знаходяться у слабких магнітних полях,

$$\vec{J} = \chi \vec{H}\,, \qquad (6.1)$$

де $\vec{H}$ – напруженість магнітного поля.

Намагніченість пов'язана з поверхневими $\vec{j}_l$ та об'ємними $\vec{j}_{мол}$ молекулярними струмами

$$\vec{j}_l = \left[\vec{J} \times \vec{n}\right],\ \vec{j}_{мол} = \operatorname{rot}\vec{J}\,, \qquad (6.2)$$

де $\vec{n}$ – орт нормалі до поверхні.

Таким чином, за принципом суперпозиції, магнітне поле у присутності магнетиків складається з поля, яке створюється струмами провідності $I_{пр}$ та молекулярними струмами $I_{мол}$. Тому теорема про циркуляцію вектора індукції магнітного поля $\vec{B}$ у присутності магнетиків набуває вигляду

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{пр} + I_{мол}\right). \qquad (6.3)$$

На межі поділу двох магнетиків при переході із однієї речовини в іншу силові лінії магнітного поля заломлюються. При цьому для векторів магнітного поля виконуються умови

$$B_{1n} = B_{2n}\,,\ H_{1\tau} = H_{2\tau}\,, \qquad (6.4)$$

де символами n та τ позначають, відповідно, нормальну та тангенціальну компоненти поля на межі поділу.

Форма та розміри магнетика впливають на його намагнічування. Для характеристики цього впливу вводиться поле розмагнічування H_p. Це поле пропорційне намагніченості речовини: $H_p = \beta J$, де β – фактор розмагнічування, який залежить від форми та розмірів тіла. Якщо значення β відмінне від нуля, то напруженість магнітного поля в тілі змінюється порівняно із значенням зовнішнього намагнічуючого поля H_0: $H = H_0 - H_p$. Оскільки намагніченість $J = \chi H$, то $H = H_0 - \beta J = H_0 - \beta\chi H$. Звідси $H = \dfrac{H_0}{1+\beta\chi}$. Очевидно, що для пара- і феромагнетиків $(\chi > 0)$ напруженість поля всередині $H < H_0$, а для діамагнетиків $(\chi < 0)$ – $H > H_0$.

Намагнічування речовини тим більше, чим більша напруженість поля H всередині тіла. Розміщуючи тіла з однакової речовини, але різної форми в одне і те ж зовнішнє поле, ми отримаємо різну напруженість поля всередині тіл, і тому тіла різної форми будуть намагнічуватись по-різному. Сильніше намагнітиться те тіло, фактор розмагнічування якого менший.

Вираз $H_p = \beta J$ передбачає, що намагніченість J однорідна у всіх точках тіла. Розрахунок показує, що це справедливо лише для еліпсоїда та фігур, які є частко-

вими випадками еліпсоїда, – кулі, тонких стержня і диска. Причому лише для кулі зв'язок є скалярним. Для еліпсоїда β є тензором.

Для всіх інших тіл формула справедлива лише наближено, і під J слід розуміти деяке середнє значення намагніченості.

6.2. Запитання та відповіді

6.2.1. *Чому дорівнює об'ємна густина молекулярних струмів в однорідно намагніченому магнетику?*

Оскільки магнетик намагнічений однорідно, то вектор намагніченості $\vec{J} = const$. Об'ємна густина молекулярних струмів $\vec{j}_{мол} = \mathrm{rot}\,\vec{J} = 0$

6.2.2. *Нехай маємо однорідно намагнічену кулю* (рис. 6.1). *Визначити знаки циркуляцій* $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l}$ *та* $\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l}$ *для контура, що лежить вздовж однієї із силових ліній поля.*

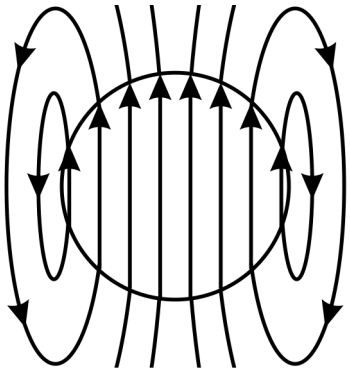


Рис. 6.1. До запитання 6.2.2

Для циркуляції вектора індукції магнітного поля за відсутності струмів провідності маємо $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{мол}$, де $I_{мол}$ – молекулярний струм, який перетинає площу поверхні, напнутої на контур L. Оскільки інтегрування ведеться вздовж силових ліній поля, то $\oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} > 0$.

Для циркуляції вектора напруженості магнітного поля маємо $\oint\limits_L \vec{H}d\vec{l} = \oint\limits_L \vec{B}d\vec{l} - \mu_0 I_{мол} = 0$.

6.2.3. *Чому дорівнюють величини та знаки потоків векторів* $\vec{B}$ *та* $\vec{H}$ *через поверхню* S*, яка охоплює північний полюс постійного магніту* (рис. 6.2)*?*

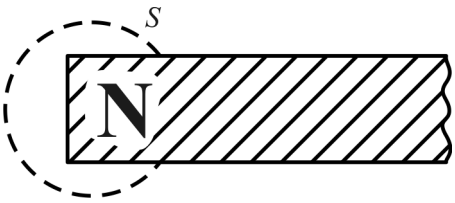


Рис. 6.2. До запитання 6.2.3

Відсутність магнітних зарядів у природі знайшла своє відображення у теоремі Гаусса для індукції магнітного поля. За цією теоремою $\oint\limits_S \left(\vec{B}\cdot\vec{n}\right)dS = 0$.

Для вектора напруженості

$$\oint\limits_S \left(\vec{H}\cdot\vec{n}\right)dS = \frac{1}{\mu_0}\oint\limits_S \left(\vec{B}\cdot\vec{n}\right)dS - \oint\limits_S \left(\vec{j}_{мол}\cdot\vec{n}\right)dS = -\oint\limits_S \left(\vec{j}_{мол}\cdot\vec{n}\right)dS < 0 .$$

6.2.4. *Чому дорівнює потік вектора $\vec{B}$ через сферу радіуса R, центр якої розміщений на межі двох магнетиків з проникностями μ_1 та μ_2* (рис. 6.3)*? Чи залежить результат від положення центра сфери?*

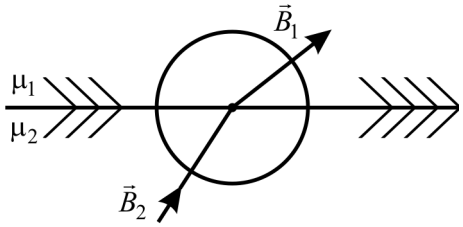


Рис. 6.3. До запитання 6.2.4

Потік вектора $\vec{B}$ через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулю і не залежить від положення центра сфери.

6.2.5. *Як зміняться межові умови* (6.4) *для векторів магнітного поля, якщо вздовж межі поділу протікатиме струм густини $\vec{j}$?*

Для нормальних компонент векторів $\vec{B}$ та $\vec{H}$ межові умови не зміняться:

$$B_{1n} = B_{2n}\,;\ \mu_2 H_{1n} = \mu_1 H_{2n}\,.$$

А для тангенціальних компонент:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = j\,;\ \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_2} = \mu_0 j\,.$$

6.2.6. *Чи можна отримати межові умови для векторів магнітного поля, користуючись виключно рівняннями Максвелла у диференціальній формі?*

Ні, не можна, оскільки нормальна компонента вектора $\vec{H}$ і тангенціальна компонента вектора $\vec{B}$ на межі двох магнетиків зазнають розриву.

6.2.7. *Поясніть, чому саме вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$ відіграє таку ж роль в теорії магнетиків, що і вектор електричної індукції $\vec{D}$ в теорії діелектриків.*

Вектор $\vec{H}$, як і вектор $\vec{D}$, не є суто польовою характеристикою і виконує допоміжну роль. Особливістю такого підходу є те, що циркуляція вектора $\vec{H}$ не залежить від властивостей (наявності) магнетика і визначається лише струмами провідності (як і потік вектора $\vec{D}$ через замкнуту поверхню визначався лише сторонніми зарядами і не залежав від властивостей діелектрика). Зручність введення цих векторів в тому, що їх завжди можна обчислити за відомими просторовими розподілами струмів провідності і сторонніх зарядів.

6.2.8. *Чи може класична теорія пояснити магнітні властивості речовин?*

За теоремою Бора-ван-Льовен класична система в стані теплової рівноваги не може мати магнітний момент навіть за наявності зовнішнього магнітного поля. В рамках послідовної класичної фізики неможливо створити теорію намагнічування. Магнетизм є суто квантово-механічною властивістю речовини

6.2.9. *В чому полягає фізичний зміст частоти Лармора? Поясніть, за яких умов радіуси орбіт атомних електронів не змінюються у зовнішньому полі.*

За теоремою Лармора рух електронів навколо ядра у зовнішньому полі $\vec{B}$, за умови його малості, відбувається майже так, як і за відсутності поля. З'являється лише загальна прецесія навколо напрямку поля з частотою Лармора $\vec{\omega}_L = -\frac{e}{2m}\vec{B}$, де e – заряд електрона ($e < 0$), m – його маса. При цьому поле має змінюватись повільно, а частота ω_0 обертання електронів навколо ядра за відсутності зовнішнього поля має задовольняти умову $\omega_0 >> \omega_L$. Тобто, прецесія електронів в атомі за наявності зовнішнього поля є невеликим збуренням руху в порівнянні з рухом електронів за відсутності поля.

6.2.10. *При внесенні магнетика у зовнішнє постійне магнітне поле електронні орбіти його атомів починають прецесувати навколо напрямку зовнішнього поля. Тобто у електронів з'являється додаткова швидкість. З іншого боку, таке магнітне поле не може змінити абсолютне значення швидкості зарядженої частинки, лише напрямок її руху. Спробуйте узгодити це протиріччя.*

В результаті прецесії електронів у зовнішньому полі у них справді з'являється додаткова кінетична енергія. Це пояснюється тим, що поява поля не може відбутись миттєво. Його зміна відбувається протягом певного часу. За законом електромагнітної індукції будь-яка зміна магнітного поля викликає появу вихрового електричного поля. Робота сил цього поля і обумовлює зміну кінетичної енергії електронів.

6.2.11. *Які властивості повинна мати речовина, щоб бути діамагнетиком?*

Діамагнетизм характерний для всіх тіл, але він часто не проявляється через більш сильний парамагнітний ефект у речовинах, атоми яких мають магнітні моменти. Тому в чистому вигляді він проявляється для елементів із заповненими електронними оболонками, коли власний магнітний момент атома дорівнює нулю. Прикладом можуть бути інертні гази, $NaCl$.

6.2.12. *Чи залежить діамагнітна сприйнятливість речовини від температури?*

Діамагнітна сприйнятливість речовин в переважній більшості випадків не залежить від температури. Це пояснюється тим, що для зміни середнього значення квадрата відстані електронів від ядра (радіуса орбіти) атому потрібно надати значну енергію. За звичайних умов теплової енергії для цього недостатньо.

6.2.13. *Ідеальний газ, молекули якого мають власний магнітний момент, але не взаємодіють між собою, помістили у зовнішнє магнітне поле. Чи проявляться парамагнітні властивості такого газу?*

За відсутності взаємодії між атомами парамагнітна речовина у зовнішньому полі буде поводити себе як діамагнетик: магнітне поле буде викликати лише ларморівську прецесію атомних електронів.

6.2.14. *Поясніть якісно температурну залежність парамагнітної сприйнятливості речовин.*

За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів парамагнетика орієнтовані хаотично і намагніченість дорівнює нулю. У магнітному полі магнітні моменти намагаються зорієнтуватись вздовж поля. Таке їх положення відповідає мінімуму енергії. Тепловий рух заважає цьому, намагаючись дезорієнтувати магнітні моменти. Тому при зростанні температури парамагнітна сприйнятливість речовини має зменшуватись.

6.2.15. *За яких умов виконується закон Кюрі для парамагнетиків?*

За законом Кюрі парамагнітна сприйнятливість речовини змінюється з температурою як $\chi \sim 1/T$. Виконується цей закон за умови, що потенціальна енергія атома у зовнішньому магнітному полі значно менша, ніж енергія теплового руху: $p_m B << kT$ (p_m – магнітний момент атома). Тобто він працює у невеликих полях і при не дуже низьких температурах. Невиконання цієї умови призводить до порушення пропорційності між вектором намагнічування $\vec{J}$ та зовнішнім полем $\vec{H}$, і закон Кюрі перестає працювати.

6.2.16. *Нехай маємо два довгі феромагнітні стержні, один з яких намагнічений вздовж поздовжньої осі. Як, не користуючись нічим, крім самих стержнів, визначити, який саме з них є намагніченим?*

Намагнічений стержень є аналогом довгого соленоїда: поле, яке він створює, існує тільки всередині стержня та біля його торців. Зовні, поблизу центральної частини стержня, воно практично відсутнє.

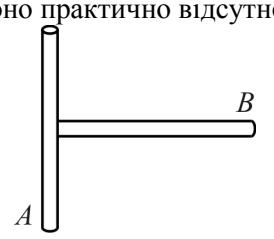


Рис. 6.4. До запитання 6.2.16

Тому, якщо торкнутись стержнем B середини стержня A (рис. 6.4) і при цьому притягання між ними не виникне, то намагніченим є стержень A, і навпаки, поява притягання свідчитиме про намагніченість стержня B.

6.2.17. *Два атоми, магнітні моменти яких $\vec{p}_{m1}$ та $\vec{p}_{m2}$, знаходяться на великій відстані l один від одного. Чому дорівнює енергія та сила взаємодії між ними, якщо їх магнітні моменти зорієнтовані як вказано на* рис. 6.5*?*

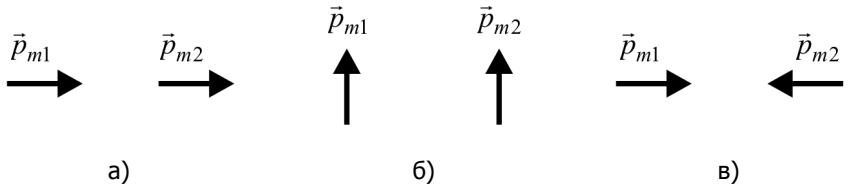


Рис. 6.5. До запитання 6.2.17

На магнітний диполь у полі з індукцією $\vec{B}$ діє сила $\vec{F} = \left(\vec{p}_m \cdot \nabla\right)\vec{B}$. Якщо поле однорідне, то $\vec{F} = 0$. Поле магнітного диполя є суттєво неоднорідним. Тому між двома магнітними диполями виникає сила взаємодії, яка залежить від їх взаємної орієнтації. Енергія такої взаємодії $W = -\int \vec{F} d\vec{l}$. У випадку

а) $F = -\dfrac{6p_{m1}p_{m2}}{l^4}$ (диполі притягуються), $W = -\dfrac{2p_{m1}p_{m2}}{l^3}$;

б) $F = \dfrac{3p_{m1}p_{m2}}{l^4}$ (диполі притягуються), $W = 0$;

в) $F = \dfrac{6p_{m1}p_{m2}}{l^4}$ (диполі відштовхуються), $W = \dfrac{2p_{m1}p_{m2}}{l^3}$.

6.2.18. *З нескінченності в соленоїд з постійним струмом вздовж його осі влітає невелика кулька з непровідного магнетика. Опишіть рух кульки, якщо система знаходиться в невагомості.*

При наближенні до соленоїда кулька буде намагнічуватись. При цьому в неоднорідному магнітному полі біля торців соленоїда на неї почне діяти сила, напрямок якої залежить від природи матеріалу, з якого зроблено кульку.

Нехай кульку зроблено з діамагнетика $(\mu < 1)$. Тоді біля торця соленоїда на неї діятиме сила відштовхування, яка гальмуватиме рух кульки. При достатньо великій швидкості вона влетить у соленоїд. При віддаленні від торця гальмуюча сила буде зменшуватись і в центральній частині соленоїда, де поле є однорідним, взагалі перетвориться на нуль. Рух кульки при цьому стане рівномірним. При вильоті з соленоїда на неї знову почне діяти сила відштовхування, прискорюючи політ кульки. Віддалившись від соленоїда на значну відстань, де магнітне поле відсутнє, кулька знову почне рухатись рівномірно.

Якщо кульку зроблено з пара- чи феромагнетика $(\mu > 1)$, все відбуватиметься навпаки. При підльоті до соленоїда кулька буде прискорюватись, далі (всередині соленоїда) рух стане рівномірним, а при вильоті із соленоїда кулька буде гальмуватись.

6.2.19. *Якщо палаючу свічку піднести до полюса постійного магніту, то її полум'я буде відхилятись. Дайте пояснення цьому явищу.*

Полум'я свічки, в основному, складається із збуджених молекул CO_2, які є діамагнетиками. У неоднорідному магнітному полі біля торця магніту на них діятиме відштовхуюча сила. Тому полум'я відхилиться вбік від магніту. При цьому температура полум'я підвищиться, а саме полум'я стане ширшим, оскільки відштовхування продуктів горіння забезпечить додатковий приплив кисню і інтенсифікує процес окислення молекул.

6.2.20. *Парамагнетик розміщують у магнітному полі, підтримуючи температуру незмінною. Як при цьому зміниться його ентропія?*

Ентропію системи можна представити у вигляді двох складових: теплової S_T і тієї, що пов'язана з намагнічуванням речовини S_B.

В результаті ізотермічного $(S_T = const)$ намагнічування парамагнетика відбувається впорядкування магнітних моментів атомів: із початково хаотичної орієнтації вони намагаються зорієнтуватись вздовж напрямку зовнішнього магнітного поля. Таке положення відповідає мінімуму їх потенціальної енергії. Тобто, система від менш впорядкованого стану переходить до більш впорядкованого. Тому S_B, а отже і повна ентропія системи повинна зменшитись.

6.2.21. *Поясніть, як при адіабатному квазірівноважному намагнічуванні (розмагнічуванні) парамагнетика змінюється його температура. Де це використовується на практиці?*

При квазірівноважному адіабатному намагнічуванні (розмагнічуванні) ентропія системи не змінюється. При намагнічуванні парамагнетика ступінь упорядкування спінів (магнітних моментів) системи буде відповідати більш високій температурі і ентропія буде «переходити» із спінової підсистеми речовини у підсистему коливань атомів гратки (див. пит. 6.2.20). Тому парамагнетик має нагріватися. Якщо ж проводити адіабатне розмагнічування (вимкнути зовнішнє поле), то все буде відбуватись навпаки: парамагнетик буде охолоджуватись. Це явище використовується для отримання наднизьких температур.

6.2.22. *Стержень із магнетика на підвісі привели в обертальний рух з кутовою швидкістю* $\vec{\omega}$ (рис. 6.6). *Що при цьому відбуватиметься з магнетиком?*

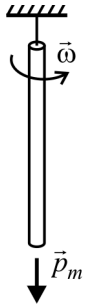


Рис. 6.6. До запитання 6.2.22

При обертанні магнетик намагнічується паралельно до осі обертання. Явище вперше експериментально спостерігалось Барнетом у 1914 р. Пояснити його можна наступним чином. Будь-який магнетик складається з атомів, які, з механічної точки зору, представляють собою гіроскопи. При дії зовнішньої сили вони намагаються зберегти напрямок власної осі обертання у просторі. Тому при обертанні стержня магнітні моменти атомів будуть прецесувати з частотою обертання магнетика. Така впорядкована прецесія, незалежно від того, з якого матеріалу виготовлено стержень, призведе до його намагнічування. Величина намагнічування $\vec{J} = -\alpha\vec{\omega}$, де α – додатна стала. Тобто, напрямок намагнічування протилежний до вектора кутової швидкості обертання.

6.2.23. *Стержень із магнетика розмістили на підвісі на осі довгого соленоїда* (рис. 6.7). *Через соленоїд почали пропускати постійний струм. Що при цьому буде відбуватись із стержнем? Розгляньте випадки:*

а) стержень виготовлено з діамагнетика;

б) стержень виготовлено з пара- чи феромагнетика.

Як зміниться відповідь, якщо струм буде змінним?

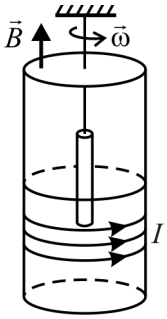


Рис. 6.7. До запитання 6.2.23

При пропусканні струму в соленоїді створюється магнітне поле, під дією якого магнетик намагнічується. Феромагнетики ($\mu > 1$) намагнічуються вздовж поля соленоїда і починають обертатись з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, напрям якої співпадає з напрямом поля. Це явище отримало назву магнітомеханічного ефекту, або ефекту Ейнштейна-де Гааза.

Намагнічування речовини відбувається за рахунок взаємодії атомів, з яких вона складається, тобто за рахунок внутрішніх сил. У замкненій системі повний момент кількості руху залишається незмінним. Оскільки до появи поля стержень знаходився у стані спокою, то повний момент кількості руху дорівнював нулю ($\vec{L} = 0$). Цей момент складається з моменту кількості руху ядер $\sum \vec{L}_я$ відносно осі та моменту кількості руху електронів $\sum \vec{L}_e$ відносно ядер атомів:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_я + \sum \vec{L}_e = 0 .$$

У першому наближенні можна вважати, що момент кількості руху електронів $\sum \vec{L}_e$ паралельний до їх сумарного магнітного моменту $\sum \vec{P}_m$. Пов'язані ці величини через гіромагнітне відношення $\sum \vec{P}_m = g \sum \vec{L}_e$. Тоді маємо

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_я + \frac{1}{g} \sum \vec{P}_m = 0 .$$

За відсутності зовнішнього поля $\sum \vec{P}_m = 0$, тому і $\sum \vec{L}_я = 0$, тобто зразок знаходиться у стані спокою. При появі поля $\sum \vec{P}_m \neq 0$ і тому $\sum \vec{L}_я = -\frac{1}{g} \sum \vec{P}_m \neq 0$. Це означає, що стержень починає обертатись, щоб повний момент кількості руху $\vec{L}$ залишався рівним нулю.

Феромагнетики намагнічуються вздовж поля. За магнітні властивості атомів феромагнетика відповідають електрони, для яких $g < 0$. Тому $\vec{\omega}$ співнапрямлена з $\vec{B}$.

Сам магнітомеханічний ефект досить малий. Для його підсилення Ейнштейн і де Гааз (1915 р.) використали явище резонансу. По соленоїду пропускали змінний струм, який намагнічував і перемагнічував зразок, викликаючи вимушені обертальні коливання. Частота змінного струму поступово змінювалась, поки коливання стержня не ставали найбільш інтенсивними.

Ефект Ейнштейна-де Гааза є оберненим до ефекта Барнета (див. пит. 6.2.22).

6.2.24. *В чому полягає суть методу магнітного екранування?*

Потреба в магнітному екрануванні виникає при проведенні досліджень, пов'язаних з вимірюванням дуже малих магнітних полів $\sim 10^{-9} \div 10^{-14}$ *Тл*. Зовнішні магнітні поля (наприклад, середнє значення індукції поля Землі $5 \cdot 10^{-5}$ *Тл*) створюють значні завади для роботи чутливої магнітометричної апаратури.

Метод магнітного екранування ґрунтується на межових умовах (6.4): зміні векторів магнітного поля при переході із одного магнетика в інший. Неперервність тангенціальних складових вектора $\vec{H}$ дає $H_1 \sin\alpha_1 = H_2 \sin\alpha_2$, а неперервність нормальних складових вектора $\vec{B}$ – $\mu_1 H_1 \cos\alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos\alpha_2$. З цих рівнянь знайдемо

$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$. При переході із магнетика з меншою магнітною проникністю в магнетик з більшою силова лінія відхиляється від нормалі на більший кут (рис. 6.8). Це приводить до концентрації магнітних силових ліній в магнетиках з більшим значенням μ.

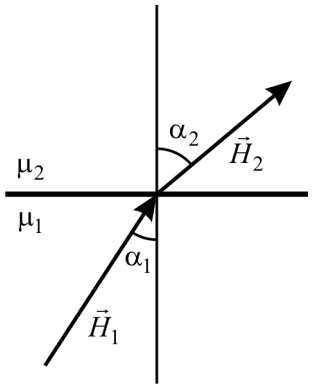


Рис. 6.8. До запитання 6.2.24

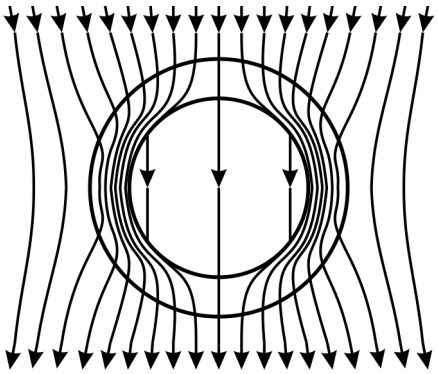


Рис. 6.9. До запитання 6.2.24

На (рис. 6.9) показано, як спотворюються магнітні силові лінії при внесенні в однорідне магнітне поле сферичної оболонки із феромагнетика. Всередині сфери концентрація силових ліній магнітного поля значно менша, ніж зовні. Це означає, що магнітне поле всередині значно ослаблене у порівнянні із полем за межами оболонки.

Зрозуміло, що оболонка із феромагнетика лише частково екранує внутрішню частину від зовнішнього магнітного поля (на відміну від оболонки із провідника, яка повністю екранує електростатичне поле, в якому знаходиться). Чим більша магнітна проникність μ, тим краща екрануюча дія. Ідеальним магнітним екраном може слугувати оболонка із надпровідника, в який магнітне поле не проникає взагалі.

Крім вимірювання малих магнітних полів, магнітне екранування використовується там, де необхідно позбутися впливу магнітного поля на рух заряджених частинок: у осцилографах, електронних спектрометрах тощо.

6.2.25. *Поясніть фізичний зміст «молекулярного поля» в теорії феромагнетизму Вейсса. Як пов'язані між собою намагнічуваність $\vec{J}$ феромагнетика та зовнішнє поле $\vec{B}$ в теорії Вейсса?*

Поняття «молекулярного поля» вводиться в теорії феромагнетизму Вейсса для пояснення спонтанної намагніченості феромагнетиків. За теорією Вейсса, якщо в результаті флуктуацій магнітні моменти двох атомів феромагнетика випадково зорієнтуються в один бік, то виникає внутрішнє «молекулярне поле», яке примусить магнітні моменти інших атомів теж зорієнтуватися в тому ж напрямку. Таким чи-

ном, внутрішнє поле створює всередині феромагнетика паралельну орієнтацію магнітних моментів атомів навіть за відсутності зовнішнього поля.

Отже, ефективне поле, яке в загальному випадку діє на атоми феромагнетика, можна звести до суми зовнішнього поля $\vec{B}_0$ та внутрішнього «молекулярного поля», яке, за припущенням Вейсса, пропорційне величині намагніченості $\vec{J}$: $\vec{B}_{еф} = \vec{B}_0 + b\mu_0\vec{J}$, де b – стала Вейсса.

6.2.26. *В чому полягає суть закону Кюрі-Вейсса для феромагнетиків? Поясніть фізичний зміст температури Кюрі.*

При температурі $T = T_C$ відбувається фазовий перехід, в результаті якого феромагнетик переходить із стану спонтанної намагніченості у парамагнітну фазу. Закон Кюрі-Вейсса встановлює залежність магнітної сприйнятливості феромагнетика від температури, коли та перевищує температуру Кюрі: $\chi(T) \sim \dfrac{1}{T - T_C}$.

6.2.27. *В чому полягають недоліки теорії феромагнетизму Вейсса?*

а) За теорією Вейсса при температурі $T < T_C$ феромагнетики повинні бути намагніченими, але як правило при $T < T_C$ спонтанна намагніченість у феромагнетиках (Fe, Co, Ni) відсутня.

б) Теорія Вейсса не може пояснити явище гістерезису.

в) Теорія Вейсса не може пояснити природу внутрішнього молекулярного поля. Розрахунки показують, що таке поле $B_{еф} \sim 10^3\ Тл$, що значно перевищує поля магнітних диполів, які знаходяться на міжатомних відстанях ($B \sim 10^{-1}\ Тл$).

6.2.28. *Наведіть причини магнітного гістерезису.*

Явище гістерезису в об'ємних зразках обумовлене двома причинами:

а) Ефектом магнітострикції, тобто зміною розмірів окремих кристалів феромагнетика при його намагнічуванні. Це супроводжується виникненням звукових хвиль і, відповідно, втратою на їх збудження енергії.

б) Наявністю дислокацій, домішок та інших дефектів. При збільшенні зовнішнього поля вони заважають руху доменних стінок. В результаті стінка рухається не плавно, а стрибкоподібно. При цьому намагніченість феромагнетика теж змінюється стрибкоподібно, що викликає появу вихрових струмів у феромагнетику і, відповідно, призводить до втрат енергії.

Результатом цього всього є незворотність частини кривої намагнічування, що і обумовлює гістерезис.

6.2.29. *Котушку з великою кількістю витків заповнюють полікристалічним феромагнетиком і через підсилювач П під'єднують до гучномовця Г* (рис. 6.8). *Опишіть, що відбуватиметься, якщо до котушки з нескінченності наближувати постійний магніт?*

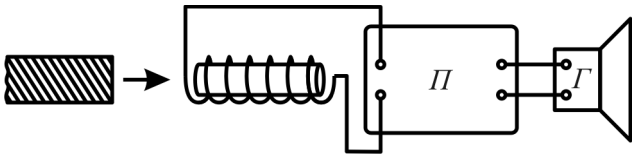


Рис. 6.8. До запитання 6.2.29

При наближенні магніту осердя котушки почне намагнічуватись. Спочатку, поки магніт досить далеко, цей процес йтиме повільно, але потім, по мірі наближення магніту, намагніченість осердя починає змінюватись стрибкоподібно. Це обумовлюється процесом зсуву меж доменів, чому перешкоджають різного роду неоднорідності (домішки, дислокації, механічні напруги тощо). При збільшенні зовнішнього поля межа домена, при своєму зміщенні, зустрічає перешкоду, зупиняється і залишається нерухомою. При подальшому зростанні поля межа долає перешкоду і стрибком переміщується далі. Саме це приводить до стрибкоподібного зростанні намагніченості і появі в колі імпульсів струму (у відповідності до закону електромагнітної індукції Фарадея). Гучномовець на це буде реагувати клацанням. При подальшому наближенні магніту намагніченість феромагнетика знову буде повільно зростати аж до насичення і клацання в гучномовці припиниться. Цей ефект називається ефектом Баркгаузена. Він є безпосереднім доказом доменної структури феромагнетиків.

6.2.30. *Що таке коерцитивна сила?*

Коерцитивна сила – це поле $\vec{H}$, у яке потрібно помістити намагнічений феромагнетик, щоб повністю скомпенсувати його залишкову намагніченість.

6.2.31. *Чи можна вводити поняття магнітної проникності речовини* μ *(або сприйнятливості* χ *) для феромагнетиків?*

Наявність у феромагнетиків спонтанної складової намагніченості позбавляє сенсу введення магнітної сприйнятливості χ чи магнітної проникності μ (як характеристик речовини) з допомогою співвідношень $\vec{J} = \chi\vec{H}$ та $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Ці величини в такому випадку визначаються як $\chi = \dfrac{dJ}{dH}$ та $\mu = \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{dB}{dH}$ і є функціями напруженості поля H.

6.2.32. *Як виглядатиме залежність* $\chi(T)$ *для феромагнетика, якщо прийняти параметр* b *«молекулярного поля» в теорії Вейсса рівним нулю? Чому дорівнюватиме в такому випадку температура Кюрі* T_C*?*

Якщо в теорії Вейсса покласти $b = 0$, то це буде означати відсутність магнітної взаємодії між атомами феромагнетика. У цьому випадку феромагнетик буде поводити себе як парамагнетик в теорії Ланжевена. Тобто $T_C = 0$, а $\chi(T) \sim 1/T$.

6.2.33. *Якісно зобразіть залежність намагніченості* $\vec{J}$ *від напруженості* $\vec{H}$ *зовнішнього поля для:*

а) діамагнетиків;

б) парамагнетиків;

в) феромагнетиків за температури $T < T_C$ *;*

г) феромагнетиків за температури $T > T_C$ *,*

де T_C *– температура Кюрі.*

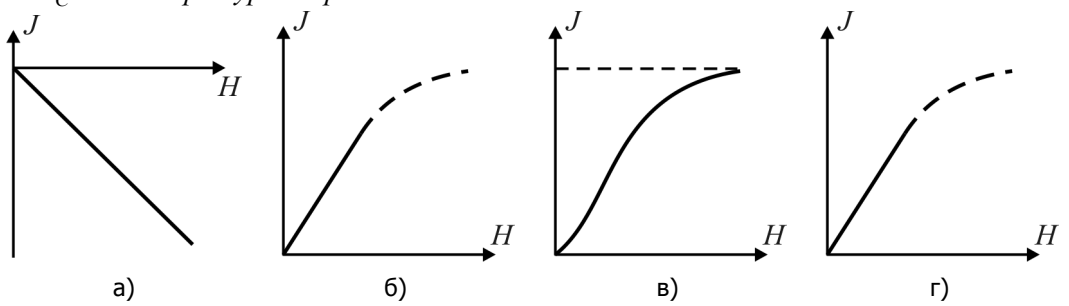


Рис. 6.9. До запитання 6.2.33

Для діамагнетиків величина намагніченості пропорційна величині магнітного поля. Крім того, діамагнетики намагнічуються проти поля (рис. 6.9а). Для парамагнетиків лінійна залежність від величини магнітного поля справджується лише за умови слабкості поля. При великих полях спостерігається насичення намагніченості (рис. 6.9б). У випадку феромагнетиків при $T < T_C$ залежність $J(H)$ має виражений нелінійний характер, що обумовлено доменною структурою феромагнетика (рис. 6.9в). Але при $T > T_C$ феромагнетик перетворюється на парамагнетик і залежність $J(H)$ повторює відповідну залежність для парамагнетиків.

6.3. Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1. *Індукція однорідного магнітного поля у вакуумі поблизу плоскої поверхні магнетика дорівнює B. Вектор $\vec{B}$ складає кут α з нормаллю $\vec{n}$ до поверхні. Магнітна проникність магнетика μ. Знайти потік вектора $\vec{H}$ через поверхню сфери радіуса R, центр якої лежить на поверхні магнетика, і циркуляцію вектора $\vec{B}$ по квадратному контуру зі стороною a* (рис. 6.10).

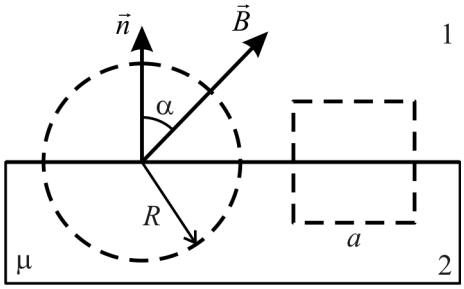


Рис. 6.10. До прикладу 6.1

Розв'язання. Представимо вектор напруженості магнітного поля у вигляді двох складових, нормальної та тангенціальної: $\vec{H} = \vec{H}_n + \vec{H}_\tau$. Тоді можна розрахувати потік для кожної складової окремо. Потік $\oint\limits_S \vec{H}_\tau d\vec{S} = 0$ внаслідок виконання однієї з межових умов (6.4) $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ (для цієї складової можна сказати, що в сферу входить, те з неї і виходить). Для нормальної складової $\oint\limits_S \vec{H}_n d\vec{S} = \int\limits_{S_1} \vec{H}_{1n} d\vec{S} + \int\limits_{S_2} \vec{H}_{2n} d\vec{S}$, де S_1, S_2 – поверхні верхньої та нижньої півсфер. З межових умов $B_{1n} = B_{2n}$, тобто $\mu_0 H_{1n} = \mu\mu_0 H_{2n}$. Знайдемо потік $\oint\limits_S \vec{H} d\vec{S} = \oint\limits_S \vec{H}_n d\vec{S}$.

$H_{1n} = \dfrac{B}{\mu_0}\cos\alpha$, тому $H_{1n} = \dfrac{B}{\mu\mu_0}\cos\alpha$.

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{B}{\mu_0}\cos\alpha \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \cdot \cos\theta + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{B}{\mu\mu_0}\cos\alpha \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \cdot \cos\theta = \pi R^2 \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0} B\cos\alpha .$$

Циркуляція вектора $\vec{B}$: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \int\limits_0^a B_{1\tau} dl - \int\limits_0^a B_{2\tau} dl + \left(\int \vec{B} d\vec{l}\right)_{бічн}$. Останній доданок дорівнює нулю, оскільки $B_{1n} = B_{2n}$. Врахуємо, що $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, тобто $B_{1\tau} = {B_{2\tau}}/{\mu}$.

$B_{1\tau} = B\sin\alpha$, звідси $B_{2\tau} = \mu B\sin\alpha$. Тоді циркуляція вектора магнітної індукції $\oint \vec{B}d\vec{l} = B_{1\tau}a - B_{2\tau}a = (1-\mu)Ba\sin\alpha$.

Приклад 6.2. *Довгий соленоїд заповнений неоднорідним парамагнетиком, сприйнятливість якого χ залежить тільки від відстані до осі r: $\chi = ar^2$. На осі соленоїда індукція магнітного поля дорівнює B_0. Знайти намагніченість $J(r)$ та густину молекулярного струму $j_{мол}(r)$ всередині магнетика.*

Розв'язання. Поле всередині нескінченного соленоїда однорідне. Найпростіше знайти його напруженість на осі. Відповідно до залежності $\chi(r)$, наведеній в умові, на осі соленоїда $\chi = 0$, тому $H = \dfrac{B_0}{\mu_0}$. Тоді $J(r) = \chi H = \dfrac{ar^2}{\mu_0}B_0$.

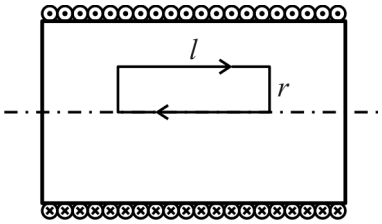


Рис. 6.11. До прикладу 6.2

Циркуляція вектора намагніченості $\oint \vec{J}d\vec{l} = I_{мол}$, де $I_{мол}$ – сумарний молекулярний струм. Вектор $\vec{J}$ спрямований вздовж осі соленоїда за напрямком поля, тому, якщо взяти контур, зображений на рис. 6.11, то при його обході $\oint \vec{J}d\vec{l} = J(r)l$. Цей же інтеграл можна подати через сумарний молекулярний струм $J(r)l = I_{мол} = \int_0^r j_{мол}(r)\cdot ldr$. Тоді $J(r) = \int_0^r j_{мол}(r)dr$ і $j_{мол}(r) = \dfrac{dJ(r)}{dr} = 2\dfrac{ar}{\mu_0}B_0$.

Приклад 6.3. *Нескінченно довгий прямий соленоїд зі струмом наполовину заповнений парамагнетиком* (рис. 6.12). *Зобразити приблизні графіки магнітної індукції B, напруженості H, намагніченості J на осі соленоїда в залежності від x.*

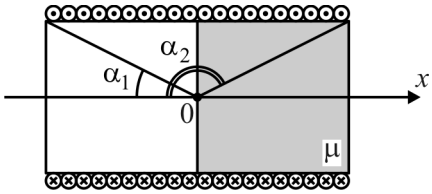


Рис. 6.12. До прикладу 6.3

Розв'язання. Використаємо вираз для магнітної індукції на осі довгого соленоїда, який ми отримали у розділі 5 (приклад 5.5) $B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$, де I – сила струму в соленоїді, n – кількість витків на одиницю його довжини, кути α_1 та α_2 вказані на рис. 6.12. Якщо соленоїд нескінченно довгий, то $B = \mu_0 nI$.

Аналіз залежностей найлегше почати з крайніх випадків, коли $x \to \pm\infty$. Позначимо через H_0 напруженість магнітного поля на осі порожнього нескінченно довгого соленоїда. $H_0 = \frac{B}{\mu_0} = nI$.

При $x \to -\infty$ $H = H_0$, $B = \mu_0 H_0$, $J = 0$; якщо ж $x \to +\infty$, то $H = H_0$, $B = \mu\mu_0 H_0$, $J = \chi H = \left(\mu - 1\right)H_0$. Поблизу межі вакуум-парамагнетик для кожної з величин відбувається перехід між цими значеннями.

Розглянемо дві частини соленоїда окремо.

Для лівої половини соленоїда $\cos\alpha_1 \to 1$, $\cos\alpha_2 = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$ $\left(x < 0\right)$. Отже, поле, яке створюється цією частиною $B_1 = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$. Аналогічний аналіз для правої половини соленоїда $\left(x > 0\right)$ дає можливість отримати вираз для індукції магнітного поля, створюваного цієї частиною, $B_2 = \frac{\mu\mu_0 nI}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} + 1\right)$. Повне поле знайдемо як суперпозицію $B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\mu + 1 + \frac{\left(\mu - 1\right)x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$. На межі $B\left(0\right) = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\mu + 1\right)$.

Тепер розглянемо напруженість магнітного поля $\begin{cases} \left(x < 0\right)\ H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{H_0}{2}\left(\mu + 1 + \frac{\left(\mu - 1\right)x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \\ \left(x > 0\right)\ H = \frac{B}{\mu\mu_0} = \frac{H_0}{2\mu}\left(\mu + 1 + \frac{\left(\mu - 1\right)x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) \end{cases}$. На межі маємо стрибок $\Delta H = \frac{H_0\left(\mu^2 - 1\right)}{2\mu}$.

Намагніченість в ізотропному магнетику визначається за формулою $J = \chi H = (\mu - 1)H$. В області, де парамагнетика немає $(x < 0)$, $J = 0$. Для $(x > 0)$ $J = \frac{H_0}{2\mu}\left((\mu^2 - 1) + \frac{(\mu - 1)^2 x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$. На межі $J(0) = \frac{H_0(\mu^2 - 1)}{2\mu}$.

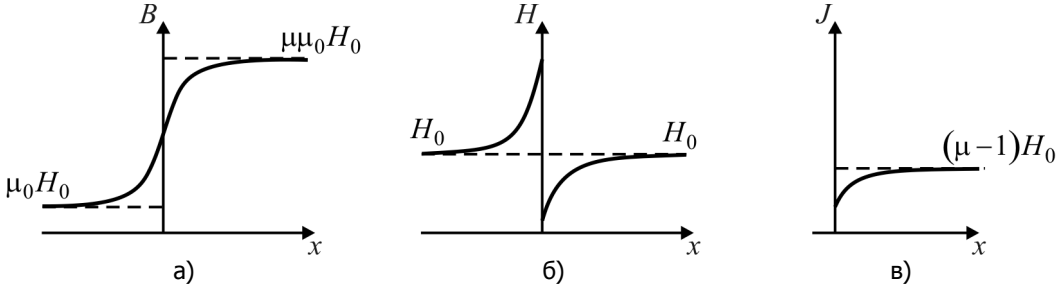


Рис. 6.13. До прикладу 6.3

Приклад 6.4. *Прямий нескінченно довгий провідник із струмом I лежить в площині поділу двох непровідних середовищ з магнітними проникностями μ_1 та μ_2. Знайти модуль вектора індукції магнітного поля B як функцію r відстані від осі провідника.*

Розв'язання. Силові лінії вектора $\vec{B}$ являють собою кола з центрами на осі провідника. Застосуємо закон повного струму, обравши контур обходу, який за формою збігається із силовою лінією: $H_1 \pi r + H_2 \pi r = \mu_0 I$; $H_1 + H_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi r}$. $H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0}$, $H_2 = \frac{B_2}{\mu_2 \mu_0}$. На межі поділу має виконуватись умова $B_{1n} = B_{2n}$. В нашому випадку силові лінії магнітного поля перпендикулярні до межі поділу, тобто межова умова набуває вигляду $B_1 = B_2 = B$. Тому $\frac{B}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{\mu_0 I}{\pi r}$. Результат можна представити через вектор магнітної індукції у вакуумі $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Таким чином, $B = \mu_0 \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} B_0$.

Приклад 6.5. *Знайти величину поля розмагнічування H_p і фактор розмагнічування β для феромагнетиків у формі:*

а) довгого тонкого стержня (зовнішнє поле прикладене вздовж стержня);
б) тонкого диска (зовнішнє поле направлене перпендикулярно до площини диску);
в) кулі;

г) довгого циліндра (зовнішнє поле прикладене перпендикулярно до осі циліндра).

Розв'язання. а) Зовнішнє поле B_0 прикладене вздовж стержня. При намагнічуванні стержня внутрішнє магнітне поле B_m виникає за рахунок впорядкування молекулярних струмів всередині магнетика (рис. 6.14), які за відсутності зовнішнього магнітного поля розташовані хаотично, так що поле, створюване ними дорівнює нулю. Такий стержень можна представити як довгий соленоїд, для якого напруженість поля, що створюється поверхневими молекулярними струмами з густиною на одиницю довжини j_l, становить $B_m = \mu_0 j_l$. Тоді магнітна індукція всередині стержня буде $B = B_0 + B_m = B_0 + \mu_0 j_l$. Густина поверхневих молекулярних струмів пов'язана з намагніченістю речовини: $\vec{j}_l = \left[\vec{J} \times \vec{n}\right]$, де $\vec{n}$ – нормаль до поверхні, по якій струми протікають. Тому $\mu\mu_0 H = \mu_0 H_0 + \mu_0 J$. Віднімемо праворуч і ліворуч H: $(\mu - 1)H = H_p + J$. Далі врахуємо, що $J = \chi H$. Отримаємо $\chi H = H_p + \chi H$. Отже, для тонкого стержня поле розмагнічування $H_p = 0$, а фактор розмагнічування $\beta = 0$.

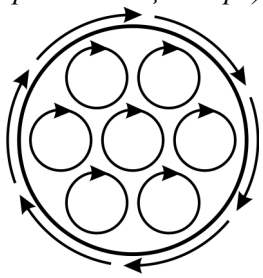


Рис. 6.14. До прикладу 6.5

Так само нульовий фактор розмагнічування має і тороїд.

б) Тонкий диск, у якого радіус R значно перевищує товщину d, розміщено у зовнішньому магнітному полі B_0 перпендикулярно до напрямку поля (рис. 6.15). Такий випадок може реалізуватися при магнітному записі інформації на тонку плівку.

Вздовж краю диска буде протікати молекулярний струм величиною $j_l d$, який у центрі диска створить поле $B_m = \dfrac{\mu_0 j_l d}{2R}$. Тоді магнітна індукція $B = B_0 + \dfrac{\mu_0 j_l d}{2R}$. Оскільки $R >> d$, то можна вважати, що $B = B_0$. Як і в попередньому випадку, віднімемо праворуч і ліворуч H: $(\mu - 1)H = H_p$. Звідси $H_p = (\mu - 1)H = \chi H = J$, а фактор розмагнічування для тонкого диска $\beta = 1$.

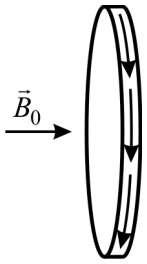


Рис. 6.15. До прикладу 6.5

в) Маємо магнетик у формі кулі радіуса R (рис. 6.16). По поверхні кулі вздовж смужки шириною $dl = Rd\theta$ протікає молекулярний струм величиною $dI_m = j_l dl = J\sin\theta \cdot Rd\theta$. Цей виток зі струмом радіуса r утворює в центрі кулі магнітне поле $dB_m = \frac{\mu_0}{2}\frac{r^2}{R^3}dI_m = \frac{\mu_0}{2}J\sin^3\theta d\theta$. Повне поле, що створюється поверхневими молекулярними струмами, $B_m = \frac{\mu_0}{2}J\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta = \frac{2\mu_0}{3}J$. Отже, індукція магнітного поля в центрі кулі $B = B_0 + \frac{2\mu_0}{3}J$. Далі знаходимо поле розмагнічування $(\mu - 1)H = H_p + \frac{2}{3}J$. Звідси $H_p = J - \frac{2}{3}J = \frac{1}{3}J$, а фактор розмагнічування $\beta = \frac{1}{3}$.

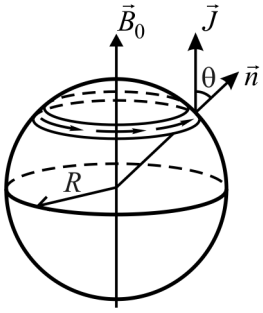
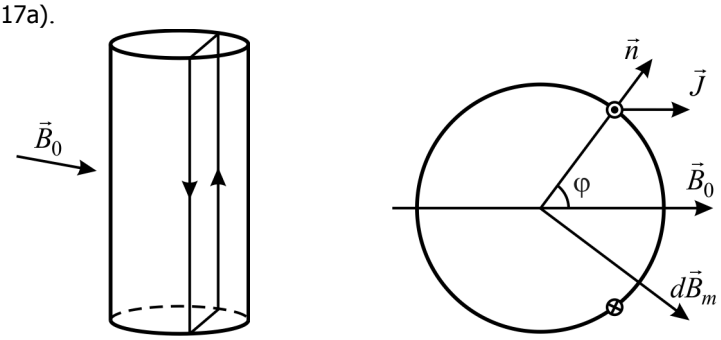


Рис. 6.16. До прикладу 6.5

г) Довгий циліндр радіуса R розміщений у магнітному полі напруженістю H_0. Вектор $\vec{H}_0$ і вісь циліндра взаємно перпендикулярні. Молекулярні струми протікають по поверхні циліндра паралельно до осі і замикаються на його віддалених торцях (рис. 6.17а).



а) б)

Рис. 6.17. До прикладу 6.5

Густина поверхневих молекулярних струмів $j_l = J\sin\varphi$. Струм, що протікає по смужці шириною $dl = Rd\varphi$, дорівнює $dI_m = JR\sin\varphi d\varphi$. Таку смужку можна розглядати як тонкий довгий провідник зі струмом, і поле, що створюється ним на осі циліндра, буде $dB_m = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI_m}{R} = \frac{\mu_0}{2\pi}J\sin\varphi d\varphi$ (рис. 6.17б). Проекція вектора $d\vec{B}_m$ на напрямок зовнішнього поля $\vec{B}_0$ дорівнює $dB_m\sin\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}J\sin^2\varphi d\varphi$. Потрібно також врахувати магнітне поле, яке створюється струмами, що протікають по іншій поло-

вині циліндра у зворотній бік. Таким чином, поле магнетика буде $B_m = 2\int_0^{\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} J \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{2} J$. Магнітна індукція $B = B_0 + \frac{\mu_0}{2} J$. Зробивши ті ж викладки, що і в попередніх випадках, отримаємо поле розмагнічування $H_p = \frac{1}{2} J$ і фактор розмагнічування $\beta = \frac{1}{2}$.

Як бачимо, нульовий фактор розмагнічування мають довгий тонкий стержень і тороїд. Саме тому при тривалому зберіганні постійних магнітів рекомендують замикати їх полюси феромагнетиком. Тоді магніт ніби перетворюється на тороїд.

Приклад 6.6. *Однорідна куля радіуса R із феромагнетика з проникністю μ знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією B_0. За таких умов куля намагнічується однорідно. Знайти магнітний момент P_m кулі.*

Розв'язання. Магнітний момент кулі можна визначити, знаючи її намагніченість: $P_m = J \cdot V = (\mu - 1) H \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$, де напруженість H магнітного поля в кулі є векторною сумою напруженостей двох полів – зовнішнього поля H_0 і поля розмагнічування H_p. Поле розмагнічування для магнетика у формі кулі було знайдено у прикладі 6.5: $H_p = \frac{1}{3} J$. Враховуючи напрямки полів, можна записати $H = H_0 - H_p = \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{1}{3} J$. Звідси $H = \frac{3B_0}{\mu_0(\mu + 2)}$; $P_m = 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0(\mu + 2)} B_0 R^3$.

Приклад 6.7. *По нескінченному прямому провіднику тече струм, густина якого залежить від відстані до осі r за законом $j = ar^2$. Радіус провідника R, магнітна проникність μ. Знайти:*

1) вектор магнітної індукції $\vec{B}$ всередині і ззовні провідника;

2) вектор-потенціал $\vec{A}$ всередині і ззовні провідника, вважаючи, що на його поверхні $A = 0$.

Розв'язання. 1) Магнітне поле пов'язане з густиною струму співвідношенням $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$. Якщо розглянути вектори, що входять до цієї формули у циліндричній системі координат $\{r, \varphi, z\}$, то кожен з них буде представлений лише однією компонентою: $\vec{j} = \{0, 0, j_z\}$ та $\vec{H} = \{0, H_\varphi, 0\}$. Тому наведене співвідношення перетворюється на $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) = j_z$ (тут використано запис оператора rot у циліндричній системі координат).

а) При $r \le R$ $j = ar^2$; $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rH) = ar^2$; $rH = \frac{ar^4}{4} + C_1$; $H = \frac{ar^3}{4} + \frac{C_1}{r}$. При $r \to 0$ маємо $H \to 0$, отже $C_1 = 0$, $B(r \le R) = \mu\mu_0 \frac{ar^3}{4}$.

б) При $r > R$ $j = 0$; $\frac{\partial}{\partial r}(rH) = 0$; $rH = C_2$; $H = \frac{C_2}{r}$.

На межі поділу $H_{1\tau} = H_{2\tau}$; $H(R) = \frac{aR^3}{4} = \frac{C_2}{R}$; $C_2 = \frac{aR^4}{4}$; $B(r > R) = \mu_0 \frac{aR^4}{4r}$.

2) Векторний потенціал $\vec{A}$ пов'язаний з індукцією поля $\vec{B}$ співвідношенням $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$. Для знаходження ротора векторного поля часто використовують його математичне означення: $\int\limits_S \mathrm{rot}\,\vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint\limits_L \vec{A} d\vec{\ell}$, де циркуляція векторного поля розраховується для контуру L, який охоплює плоску площадку dS. Напрям обходу контуру обирається таким чином, щоб циркуляція набувала максимального значення. Оберемо контур у площині поздовжнього перерізу провідника, як це показано на рис. 6.18. Для вибраного контуру

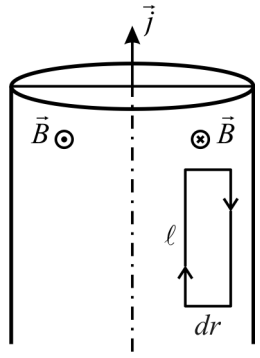


Рис. 6.18. До прикладу 6.7

$$B_\varphi dS = B_\varphi \ell dr = A_z(r + dr)\ell - A_z(r)\ell = \ell \frac{\partial A_z}{\partial r} dr.$$

Всередині провідника $\frac{\partial A}{\partial r} = \mu\mu_0 \frac{ar^3}{4}$; $A = \mu\mu_0 \frac{ar^4}{16} + C_1$. За умовою $A(R) = 0$, тому $C_1 = -\mu\mu_0 \frac{aR^4}{16}$; $A(r \le R) = \frac{\mu\mu_0 a}{16}(r^4 - R^4)$.

Ззовні провідника $\frac{\partial A}{\partial r} = \mu_0 \frac{aR^4}{4r}$; $A = \frac{\mu_0 aR^4}{4} \ln r + C_2$. Так само $A(R) = 0$, тому $C_2 = -\frac{\mu_0 aR^4}{4} \ln R$; $A(r > R) = \frac{\mu_0 aR^4}{4} \ln \frac{r}{R}$.

Приклад 6.8. *Постійний струм I тече по циліндричному провіднику радіуса R. Провідник виготовлено з магнетика із сприйнятливістю $\chi = ar$, де r – відстань від осі провідника, a – додатна стала. Знайти об'ємну і поверхневу густини молекулярних струмів.*

Розв'язання. Поверхнева густина молекулярних струмів $\vec{j}_l = [\vec{J} \times \vec{n}]$, об'ємна густина – $\vec{j}_{мол} = \mathrm{rot}\,\vec{J}$. В свою чергу вектор намагнічування можна визначити через його зв'язок з напруженістю поля $\vec{J} = \chi \vec{H}$.

Знайдемо напруженість магнітного поля за допомогою співвідношення $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$. Як і в прикладі 6.7 симетрія задачі дозволяє перейти до її розгляду у циліндричній системі координат, де вектори $\vec{j}$ та $\vec{H}$ представлені лише однією компонентою кожен: $\vec{j} = \{0, 0, j\}$ та $\vec{H} = \{0, H, 0\}$. Тому вираз для оператора rot зводиться до $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rH) = j$. Далі $rH = \frac{jr^2}{2} + C_1$; $H = \frac{jr}{2} + \frac{C_1}{r} = \frac{jr}{2}$, оскільки при $r \to 0$ має $H \to 0$, і, отже, $C_1 = 0$.

Тепер можемо отримати вираз для вектора намагнічування $J = \chi H = \frac{aj}{2} r^2$.

Поверхнева густина молекулярних струмів $j_l = J(R) = \frac{aj}{2} R^2 = \frac{aI}{2\pi}$. Повний поверхневий струм $I_l = j_l \cdot 2\pi R = aIR$. Напрям протікання поверхневого струму визначається напрямом векторного добутка $\left[\vec{J} \times \vec{n}\right]$ (рис. 6.19).

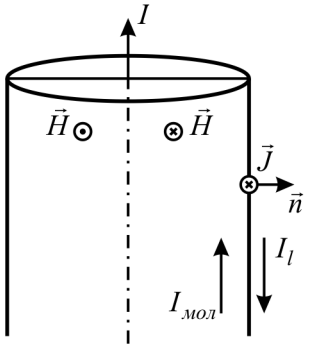


Рис. 6.19. До прикладу 6.8

Для об'ємної густини молекулярних струмів $j_{мол} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rJ) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{aj}{2} r^3\right) = \frac{3aj}{2} r$. Повний об'ємний молекулярний струм $I_{мол} = \int_0^R j_{мол} \cdot 2\pi r dr = \int_0^R \frac{3aj}{2} r 2\pi r dr = \pi a j R^3 = aIR$. Струми рівні за величиною і протилежні за напрямом.

Приклад 6.9. *Кулю радіуса r з парамагнетика проникністю μ повільно перемістили вздовж осі кільця радіуса R $(R >> r)$ зі струмом I з центра кільця в область, де поле B дорівнює нулю. Визначити роботу, яка виконується при цьому переміщенні.*

Розв'язання. Робота при переміщенні кулі $dA = Fdx$; $F = P_m \frac{dB}{dx}$, де P_m – магнітний момент кулі. У відповідності до результату прикладу 6.6

$P_m = 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0 (\mu + 2)} B r^3$, де B – магнітна індукція зовнішнього поля, яка при переміщенні кулі змінюється від $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$ у центрі кільця (див. приклад 5.2) до нуля. Таким чином, $dA = P_m \frac{dB}{dx} dx = 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0 (\mu + 2)} r^3 B dB$;

$$A = 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0 (\mu + 2)} r^3 \int_0^{B_0} B dB = 2\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0 (\mu + 2)} r^3 B_0{}^2 .$$

Для парамагнетика $\mu + 2 \approx 3$, тоді $A \approx \frac{\pi}{6} \mu_0 (\mu - 1) \frac{r^3}{R^2} I^2$.

Приклад 6.10. *Оцінити магнітну сприйнятливість одноатомного ідеального газу хімічного елемента з порядковим номером* Z.

Розв'язання.

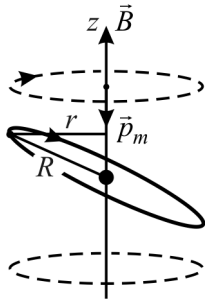


Рис. 6.20. До прикладу 6.10

При розміщенні атома в магнітному полі його електронна орбіта починає прецесувати навколо напрямку поля з частотою Лармора $\Omega = \frac{eB}{2m}$ (тут e, m – заряд і маса електрона). Додаткове обертання електрона (на додачу до власного обертання навколо ядра) призводить до появи додаткового струму $I = \frac{e}{T} = \frac{e\Omega}{2\pi}$, який, в свою чергу, створює додатковий магнітний момент $\vec{p}_m = IS\vec{n} = -\frac{e^2 r^2 \vec{B}}{4m}$, спрямований за правилом Ленца у протилежний до магнітного поля бік (рис. 6.20). Площу $S = \pi r^2$ виражено через середнє значення квадрата відстані електрона від осі z. Для сферично симетричного атома середній квадрат відстані електрона від ядра $< R^2 > = < x^2 > + < y^2 > + < z^2 > = 3 < x^2 >$, відстань $r^2 = < x^2 > + < y^2 > = 2 < x^2 >$ (у

цих формулах використовуються середні значення квадратів відповідних координат). Тому $r^2 = \frac{2}{3} < R^2 >$.

Для атома, в якому на орбітах обертаються Z електронів, магнітний момент буде рівний $\vec{p}_m = -\frac{e^2}{6m}\vec{B}\sum_{i=1}^{Z} < R_i^2 >$, а намагніченість $\vec{J} = \vec{p}_m n = -\frac{e^2 n}{6m}\vec{B}\sum_{i=1}^{Z} < R_i^2 >$, де n – концентрація атомів.

Оцінимо значення $\frac{e^2 n}{6m}\sum_{i=1}^{Z} < R_i^2 >$. Основний внесок в діамагнетизм вносять зовнішні електрони, радіуси орбіт яких є найбільшими, тому знехтуємо внеском близьких до ядра електронів і замінимо $\sum_{i=1}^{Z} < R_i^2 > \approx N_0 < R_0^2 >$, де N_0 – число валентних електронів $(N_0 \sim 1 \div 8)$, $< R_0^2 >$ – середній квадрат радіуса зовнішньої оболонки $(10^{-20}\,м^2)$. Для оцінки використаємо такі значення: концентрація атомів $n = 10^{29}\,м^{-3}$, заряд електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл$, маса електрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,кг$. За таких параметрів $\frac{e^2 n}{6m}\sum_{i=1}^{Z} < R_i^2 > \approx \frac{1{,}6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{29}}{6 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}} 10^{-20} N_0 \approx 4{,}7 N_0$. Враховуючи, що $J = \chi H$, а $B = (1+\chi)\mu_0 H$, знайдемо магнітну сприйнятливість: $\chi = \frac{-4{,}7\mu_0 N_0}{1 + 4{,}7\mu_0 N_0} \approx -4{,}7\mu_0 N_0 \approx -6 \cdot 10^{-6} N_0$. Таким чином справді у діамагнетиків магнітна сприйнятливість досить мала за величиною.

Провівши нескладний аналіз, можна побачити, що сприйнятливість діамагнетика не залежить від температури. Це і зрозуміло, оскільки діамагнетизм виникає внаслідок впливу зовнішнього магнітного поля на внутрішній рух електронів у атомі, а при невисоких температурах теплові зіткнення атомів між собою не впливають на внутрішній рух електронів.

Приклад 6.11. *Отримати вираз для намагніченості $\vec{J}$ парамагнетика, магнітний момент молекул якого p_m, концентрація молекул n. Парамагнетик знаходиться у зовнішньому магнітному полі з індукцією $\vec{B}$ при температурі T. Магнітні моменти молекул можуть орієнтуватися у зовнішньому полі лише трьома способами: вздовж поля, проти поля та впоперек поля. Оцінити парамагнітну сприйнятливість речовини за умов $T = 300\,K$, $p_m = 10^{-23}\,Дж/Тл$, $B = 1\,Тл$, $n = 10^{28}\,м^{-3}$.*

Розв'язання. Парамагнетики – це речовини, атоми яких мають власний магнітний момент. Під впливом зовнішнього магнітного поля ці моменти намагаються зорієнтуватися за полем, але цьому перешкоджає тепловий рух. Таким чином, можна зробити висновок, що намагніченість парамагнетика буде залежати від величини магнітного поля і температури.

Статистична фізика дає наступні вирази для концентрації молекул, які орієнтуються вздовж поля n_1, проти поля n_2 і перпендикулярно до нього n_3:

$$n_1 = n_0 \exp\left\{-\frac{W_1}{kT}\right\};\ n_2 = n_0 \exp\left\{-\frac{W_2}{kT}\right\};\ n_3 = n_0 \exp\left\{-\frac{W_3}{kT}\right\},$$

де W_1, W_2, W_3 – потенціальні енергії молекул у полі, n_0 – стала, яка знаходиться із умови нормування $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Енергія молекул у магнітному полі залежить від орієнтації їх магнітних моментів: вздовж поля – $W_1 = -p_m B$, проти поля – $W_2 = p_m B$, перпендикулярно – $W_3 = 0$.

Намагніченість $\vec{J}$ визначається як сумарний магнітний момент одиниці об'єму:

$$\vec{J} = n_1 \vec{p}_m - n_2 \vec{p}_m = n_0 \vec{p}_m \left(\mathrm{e}^{\frac{p_m B}{kT}} - \mathrm{e}^{-\frac{p_m B}{kT}} \right).$$

За умовою нормування $n = n_0 \left(\mathrm{e}^{\frac{p_m B}{kT}} + \mathrm{e}^{-\frac{p_m B}{kT}} + 1 \right)$.

Звідси $\vec{J} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{p_m B}{kT}} - \mathrm{e}^{-\frac{p_m B}{kT}}}{\mathrm{e}^{\frac{p_m B}{kT}} + \mathrm{e}^{-\frac{p_m B}{kT}} + 1} \cdot n \cdot \vec{p}_m$.

Оцінка величини $\dfrac{p_m B}{kT} = \dfrac{10^{-23} \cdot 1}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \sim 2 \cdot 10^{-3} << 1$ дозволяє у останній формулі розвинути експоненти у ряд Тейлора і, обмежившись двома першими членами ряду, спростити вираз $\vec{J} \approx \dfrac{2}{3} \dfrac{n p_m^{\ 2}}{kT} \vec{B}$. З іншого боку, $\vec{J} = \chi \vec{H} = \dfrac{\chi}{\mu_0 (1+\chi)} \vec{B}$. Таким чином $\dfrac{\chi}{1+\chi} = \dfrac{2}{3} \dfrac{n p_m^{\ 2}}{kT} \mu_0$. Підставляючи у останню формулу значення величин, можемо переконатись, що права частина рівняння набагато менша за одиницю. Тому $\chi \approx \dfrac{2}{3} \dfrac{n p_m^{\ 2}}{kT} \mu_0 \sim 2 \cdot 10^{-4}$.

Приклад 6.12. *Відомо, що в електротехніці змінних струмів використовують магнітом'які феромагнетики, тобто такі, що мають вузьку петлю гістерезису. Чому?*

Розв'язання. Розглянемо тонкий феромагнітний тороїд довжиною L, на який навито обмотку з N витків. Нехай при протіканні струму I через тороїд магнітна проникність феромагнетика становить μ. Напруженість магнітного поля в тороїді $H = \frac{IN}{L}$.

Робота по намагнічуванню феромагнетика $dA = Id\Phi$. Магнітний потік через всі витки тороїда $\Phi = NBS$, де S – площа поперечного перерізу тороїда. У формулу для роботи підставимо вирази для магнітного потоку і сили струму: $dA = \frac{HL}{N} NSdB = HdB \cdot V$, $V = SL$ – об'єм магнетика.

У формулі для роботи HdB – елемент петлі гістерезису. Таким чином, площа петлі гістерезису визначає втрати енергії на перемагнічування феромагнетика. Чим більша площа петлі, тим інтенсивніше нагрівається зразок. Тому для зменшення втрат в електротехніці змінних струмів використовують м'які феромагнетики з вузькою петлею гістерезису.

Приклад 6.13. *На якій відстані від одного з кінців довгого соленоїда маленька парамагнітна кулька буде знаходитись під впливом максимальної сили? Радіус соленоїда R.*

Розв'язання. Використаємо вираз для магнітної індукції на осі довгого соленоїда, який ми отримали у розділі 5 (приклад 5.5) $B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$, де I – сила струму в соленоїді, n – кількість витків на одиницю його довжини, кути α_1 та α_2 вказані на рис. 6.21.

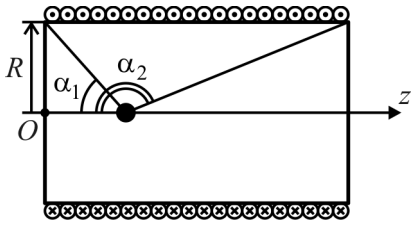


Рис. 6.21. До прикладу 6.13

Якщо кулька знаходиться біля одного з кінців соленоїда, то $\cos\alpha_1 = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$, а $\cos\alpha_2 \to -1$. Тоді магнітна індукція $B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$. Через малі розміри кульки можна вважати, що вона намагнічується однорідно і магнітний момент такої кульки у відповідності до прикладу 6.6 $P_m = 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0\left(\mu + 2\right)} Ba^3$, де a – радіус кульки. Сила, яка діє на кульку з таким магнітним моментом,

$F = P_m \dfrac{dB}{dz} = 4\pi \dfrac{(\mu - 1)a^3}{\mu_0(\mu + 2)} B \dfrac{dB}{dz}$. Підставимо вираз для індукції магнітного поля:

$$F = \frac{(\mu - 1)}{(\mu + 2)} a^3 \pi \mu_0 n^2 I^2 R^2 \left[\frac{1}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} + \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^2} \right].$$

Для знаходження екстремуму візьмемо похідну по z і прирівняємо отриманий вираз до нуля: $\dfrac{dF}{dz} = 0$.

Маємо:

$$-\frac{3z}{\left(R^2 + z^2\right)^{5/2}} + \frac{R^2 - 3z^2}{\left(R^2 + z^2\right)^3} = 0.$$

$$-3z\sqrt{R^2 + z^2} + R^2 - 3z^2 = 0$$

Розв'язки цього рівняння $z = \pm \dfrac{R}{\sqrt{15}}$. Який з цих коренів відповідає максимуму легко з'ясувати, підставивши відповідне значення у вираз для сили. Отже, максимальна сила буде діяти на парамагнітну кульку всередині соленоїда на відстані $z = \dfrac{R}{\sqrt{15}}$ від його краю.

Приклад 6.14. *Тонкий магнітний стержень із залишковою намагніченістю підвішений за середину і здійснює у магнітному полі Землі з індукцією $\vec{B}$ малі коливання поблизу положення рівноваги з частотою ω_0. Визначити залишкову намагніченість стержня $\vec{J}$, якщо його довжина l, а густина матеріалу стержня ρ.*

Розв'язання. У полі Землі на намагнічений стержень діє момент сил $\vec{M} = \left[\vec{P}_m \times \vec{B}\right]$, модуль якого дорівнює $P_m B \sin\alpha$, де α – кут відхилення стержня від положення рівноваги, P_m – його магнітний момент. Стержень здійснюватиме коливальні рухи, які можна описати за допомогою закону збереження моменту імпульсу

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -P_m B \sin\alpha,$$

де $I = \dfrac{ml^2}{12}$ – момент інерції стержня відносно осі обертання (m – маса стержня).

З урахуванням малості коливань $(\sin\alpha \simeq \alpha)$ маємо

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{P_m B}{I}\alpha = 0.$$

Власна частота коливань системи $\omega_0{}^2 = \frac{P_m B}{I} = 12\frac{JB}{\rho l^2}$. Звідси $J = \frac{\omega_0{}^2 \rho l^2}{12B}$.

Приклад 6.15. *Феромагнітна кулька знаходиться у зовнішньому однорідному магнітному полі і намагнічується до насичення. Після цього зовнішнє поле вимикається. За його відсутності індукція та напруженість поля в кульці пов'язані між собою наступним співвідношенням $B = \alpha(1+\beta H)$, де α, β – додатні сталі. Визначити залишкову намагніченість кульки J_0. Вважати, що кулька намагнічується однорідно, а залишкова намагніченість дорівнює намагніченості насичення.*

Розв'язання. У зовнішньому полі на поверхні кульки виникають молекулярні струми, які створюють всередині кульки додаткове однорідне поле $B_m = \frac{2\mu_0}{3}J$ (див. приклад 6.5в). Тоді результуюча індукція в кульці $B = B_0 + \frac{2\mu_0}{3}J$, де B_0 – магнітна індукція зовнішнього поля. Кульку намагнічують до насичення і вимикають зовнішнє поле: $B = B_0 + \frac{2\mu_0}{3}J_S = \frac{2\mu_0}{3}J_S$. За умовою задачі при відсутності зовнішнього поля $B = \alpha(1+\beta H)$. Напруженість поля H всередині магнетика може відрізнятись від напруженості зовнішнього намагнічуючого поля H_0: $H = H_0 - H_p$, де H_p – поле розмагнічування, яке залежить від форми та розміру магнетика. Для кулі $H_p = \frac{1}{3}J$ (приклад 6.5в). Тому, коли зовнішнє поле вимкнули, напруженість всередині намагніченої кульки стала рівною $H = -H_p = -\frac{1}{3}J_0$, а відповідна індукція $B = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{3}J_0\right)$. Прирівнюючи два вирази для індукції магнітного поля всередині кульки, можна отримати вираз для залишкової намагніченості $J_0 = \frac{3\alpha}{2\mu_0 + \alpha\beta}$.

Приклад 6.16. *Осердя тонкої тороїдної котушки, яка має N витків, виготовлено із магнітного матеріалу. Середній радіус котушки R. В осерді зроблено вузький поперечний повітряний проріз ширини l. У котушці протікає постійний струм, при певному значенні якого I_0 відбувається насичення осердя. Цьому струму відповідає напруженість поля в осерді H_0. Визначити намагніченість насичення J_0.*

Розв'язання. Нехай напруженість магнітного поля в осерді H_1, а в повітряному проміжку H_2. За теоремою про повний струм $\oint_L \vec{H}d\vec{l} = H_1(2\pi R - l) + H_2 l = NI$. З межових умов для вектора індукції магнітного поля $B_2 = B_1$, або $\mu_0 H_2 = \mu\mu_0 H_1 = \mu_0 H_1 + \mu_0 J$.

За умовою при насиченні $I = I_0$, $H_1 = H_0$, $J = J_0$. В результаті закон повного струму набуває вигляду $H_0(2\pi R - l) + H_0 l + J_0 l = NI_0$. Звідси $J_0 = \dfrac{NI_0 - 2\pi R H_0}{l}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. – М., 1983. – Т.3. – 688 с.
2. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. – М., 1985. – 463 с.
3. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М., 1977. – 616 с.
4. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сєндс М.* Фейнмановские лекции по физике. – М., 1977. – Т.5. – 269 с.; Т.6. – 350 с.; Т.7. – 226 с.
5. *Иродов И.Е.* Электромагнетизм. Основные законы. – М., 2000. – 392 с.
6. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. – М., 1978. – 792 с.
7. *Гуменюк А.Ф.* Електрика та магнетизм. – Київ, 2008. – 512 с.
8. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. – М., 1988. – 416 с.
9. *Стецюк В.М., Харченко Н.П.* Електрика і магнетизм в задачах. – Київ, 2005. – 200 с.

ЗМІСТ

5. Магнітне поле постійного струму. Сила Ампера 3
5.1. Короткі теоретичні відомості 3
5.2. Запитання та відповіді 6
5.3. Приклади розв'язування задач 16

6. Магнетики 34
6.1. Короткі теоретичні відомості 34
6.3. Запитання та відповіді 36
6.4. Приклади розв'язування задач 48

Список рекомендованої літератури 64