Київський національний університет імені Тараса Шевченка

І. О. Четверіков, А. М. Куцик

Теорія електричних кіл в прикладах і задачах

Частина I. Лінійні електричні кола постійного струму

Київ 2020

УДК 621.3

І. О. Четверіков, А. М. Куцик
Теорія електричних кіл в прикладах і задачах. Частина І. Лінійні електричні кола постійного струму: Навчально-методичний посібник для студентів радіофізичних спеціальностей. — К. 2020. — 96 с.

Рецензенти:

Завідувач кафедри технічної кібернетики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського доктор технічних наук, професор Пархомей Ігор Ростиславович

Завідувач кафедри енергеоефективних технологій Державного університету телекомунікацій, доктор технічних наук, старший науковий співробітник Трембовецький Максим Петрович

Затверджено Вченою радою
факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
Протокол № 8 від 17 лютого 2020 року

© І. О. Четверіков, А. М. Куцик

Зміст

1 Передмова **2**

2 Електричні кола постійного струму **3**
2.1 Основні елементи і властивості електричних кіл 3
2.1.1 Поняття двополюсника і чотириполюсника 3
2.1.2 Фізичні поняття про електромагнітні процеси в електричних колах 4
2.1.3 Пасивні елементи кіл і їх властивості 6
2.1.4 Активні елементи кіл та їх характеристики 10
2.2 Основні закони електричних кіл 13
2.2.1 Закон Ома і вольт-амперна характеристика двополюсника 13
2.2.2 Закон Ома для кола з декількома джерелами ЕРС 15
2.2.3 Закони Кірхгофа 15
2.2.4 Режими роботи електричного кола 17
2.3 Методи розрахунку складних кіл постійного струму 19
2.3.1 Метод еквівалентних перетворень 19
2.3.2 Метод рівнянь Кірхгофа 22
2.3.3 Метод контурних струмів 23
2.3.4 Метод вузлових потенціалів 24
2.3.5 Метод суперпозиції 26
2.3.6 Метод еквівалентного генератора 26

3 Приклади розв'язання задач **29**
3.1 Розрахунок еквівалентних опорів 29
3.2 Закони Ома і Кірхгофа. Баланс потужностей 32
3.3 Методи контурних струмів і вузлових потенціалів 47
3.4 Метод накладання. Перетворення трикутника в зірку і навпаки . 61
3.5 Метод еквівалентного генератора 67

4 Задачі для самостійного розв'язку **84**
4.1 Розрахунок еквівалентних опорів 84
4.2 Закони Ома і Кірхгофа. Баланс потужностей 84
4.3 Методи контурних струмів і вузлових потенціалів 89
4.4 Метод накладання. Перетворення трикутника в зірку і навпаки . 92
4.5 Метод еквівалентного генератора 93

5 Рекомендована література **96**

1 Передмова

Курс "Основи теорії кіл"є базовим при підготовці студентів, що навчаються по спеціальності 172 "Телекомунікації та радіотехніка". Метою даного посібника є допомога студентам при вирішенні задач, що пов'язані із розрахунком лінійних кіл постійного струму.

В посібнику розглянуто основні методи аналізу кіл постійного струму: метод рівнянь Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод суперпозиції, метод еквівалентного генератора.

Основний матеріал посібника розбито на три частини. У розділі 2 розглянуто основні теоретичні відомості, які необхідні для розуміння матеріалу. Розділ 3 містить приклади розв'язання типових задач. Задачі із розділу 4 призначені для самостійного розв'язку.

2 Електричні кола постійного струму

2.1 Основні елементи і властивості електричних кіл

2.1.1 Поняття двополюсника і чотириполюсника

Електричним колом називають сукупність пристроїв, які призначені для забезпечення проходження електричного струму. Пристроями, що утворюють електричне коло, є: джерела електромагнітної енергії (генератори); споживачі електромагнітної енергії (приймачі, навантаження); системи передачі енергії.

Кожне джерело, як і кожний приймач наділені двома затискачами, за допомогою яких через систему передачі здійснюється зв'язок між джерелами і приймачами. Ці затискачі інакше називають полюсами джерела чи приймача. А тому джерела і приймачі отримали загальну назву ДВОПОЛЮСНИКІВ. У загальному випадку двополюсник може об'єднувати декілька джерел і приймачів і складатися із більш простих двополюсників, що електрично зв'язані між собою.

Двополюсник, що не утримує джерел електромагнітної енергії, називають пасивним і зображають у вигляді прямокутника (рис. 2.1). Двополюсник, що утримує джерело енергії, називають активним (рис. 2.2).

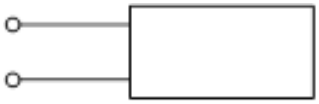

Рис. 2.1

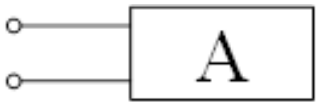

Рис. 2.2

Проміжний пристрій, який служить для передачі енергії від джерела до приймача, повинен мати чотири затискача. Такий пристрій називають чотириполюсником (рис. 2.3). Простим пристроєм для передачі енергії від джерела до приймача є два проводи, що з'єднують затискачі джерела з затискачами приймача.

Рис. 2.3

2.1.2 Фізичні поняття про електромагнітні процеси в електричних колах

Електромагнітні процеси в електричних колах при передачі енергії повністю описуються за допомогою таких понятьяк струм, напруга, потужність, ЕРС.

Нагадаємо, що електричний струм у провідниках є явищем упорядкованого руху електричних зарядів. Інтенсивність а босила струму вимірюється кількістю електричного заряду Q, що проходить через поперечний переріз провідника в одиницю часу

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{2.1}$$

Отже, струм визначається швидкістю зміни заряду з часом. У системі СІ заряд вимірюється в кулонах (К), час у секундах (с), струм в амперах (А).

Струм як відношення двох скалярних величин також є скалярна алгебраїчна величина, знак якої залежить від напрямку руху зарядів одного знаку. Домовимось, що напрямок руху позитивних зарядів відповідає позитивному струму. Задати однозначно струм у вигляді деякої пункції часу можливо тільки після вказівки вибраного позитивного напрямку струму. А тому перед початком аналізу потрібно показати на всіх ділянках кола позитивні напрямки струмів, вибір яких може бути довільним.

Проходження електричного струму або перенесення зарядів у колі зв'язані з перетвореннями або споживаннями енергії. Для визначення енергії, яка затрачується на переміщені зарядів в електричному колі,вводять нову величину — НАПРУГУ.

Напругою називають кількість енергії, яка затрачується на переміщення одиниці заряду із однієї точки схеми в іншу

$$U = \frac{dW}{dQ} \tag{2.2}$$

де W — енергія. При вимірюванні енергії в джоулях (Дж) і заряду в кулонах, напруга вимірюється у вольтах (В).

Напруга як відношення двох скалярних величин також є скалярна алгебраї-

чна величина. Для однозначного визначення знаку напруги між двома виводами ділянки кола, одному з виводів умовно приписують позитивну полярність, яку відзначають або стрілкою, що направлена від виводу, або знаком ”+"(рис. 2.4 а,б) напруга позитивна, якщо її полярність співпадає з вибраною.

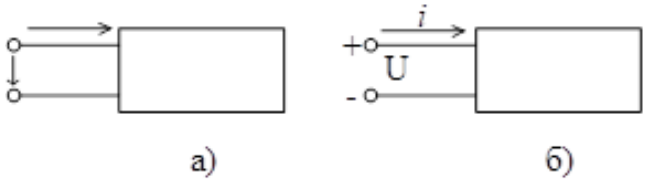

Рис. 2.4

Енергія що затрачується на переміщення заряду Q на ділянці кола з напругою U, до моменту часу t

$$W = \int_{-\infty}^{t} UdQ = \int_{-\infty}^{t} UIdt \tag{2.3}$$

Потужність електричного кола

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{2.4}$$

Потужність в електричному колі, що дорівнює добутку напруги і струму, також є алгебраїчною величиною. Знак її визначається знаками напруги і струму: при співпаданні цих знаків потужність позитивна, що відповідає споживанню енергії; при неспівпаданні знаків напруги і струмів, потужність від'ємна, що означає її віддачу. Така ділянка кола є джерелом енергії.

Струм і напругу будемо вважати функціями часу довільної форми: $I = F(t)$; $U = F(t)$.В окремих випадках вони можуть бути постійними або періодичними. Нагадаємо, що постійним струмом називають струм, що не змінюється з часом:

$$I = \frac{Q}{t} \tag{2.5}$$

де Q — кількість зарядів, що перенесені за час t.

2.1.3 Пасивні елементи кіл і їх властивості

Для кількісного опису процесів, що мають місце в колах, вводять на розгляд пасивні елементи, величини яких характеризують певними значеннями, які називають параметрами. До пасивних елементів кола відносять резистори, індуктивні котушки і конденсатори, їх параметрами є відповідно опір, індуктивність і ємність.

РЕЗИСТОРАМИ називають елементи електричних кіл, головна властивість яких полягає в необоротності перетворення електромагнітної енергії у тепло. Умовні графічні зображення резисторів подано на рис. 2.6.

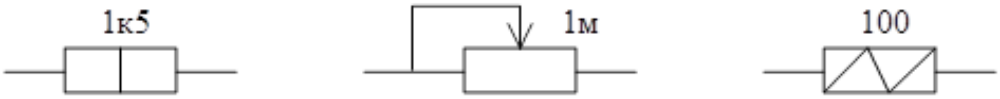

Рис. 2.5

Для резистора виготовленого у формі стрижня, опір

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{2.6}$$

де ρ — питомий опір матеріалу, l —- довжина, S — поперечний переріз резистора.

Опір резистора залежить також від його температури:

$$R_t = R_0 \left[1 + \alpha(t - t_0)\right], \tag{2.7}$$

де R_0 — опір резистора при температурі t_0, α — температурний коефіцієнт, який показує на скільки зростає опір резистора при підвищені температури на один градус.

Опір резистора залежить також від частоти змінного струму, що пов'язано з явищем поверхневого ефекту. Дійсно, при протіканні постійного струму густина струму по перерізу резистора однакова. Густина же змінного струму у поверхні резистора більша, ніж у його центральній частині, що обумовлюється явищем електромагнітної індукції. Таким чином, при змінному струмі поперечний переріз резистора якби зменшується, що приводить до збільшення його опору. Це явище помітно проявляється тільки в області надвисоких частот. Опір резистора змінному струму називають активним, а постійному струму — електричним опором.

У системі СІ опір резистора вимірюється в Омах (Ом). Кратні одиниці Ома:

1 кОм = 1000 Ом; 1 МОм = 10^6 Ом.

Експериментально встановлено, що струм I та напруга U електричного опору пов'язані законом Ома:

$$U = RI, \quad I = gU, \quad g = \frac{1}{R}, \tag{2.8}$$

де g — провідність резистора, яка вимірюється в сименсах.

Потужність резистора дорівнює швидкості виділення теплоти

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R} \tag{2.9}$$

Енергія, що витрачається в резисторі на протязі проміжку часу від t_1 до t_2, дорівнює

$$W_R = \int\limits_{t_1}^{t_2} Pdt = \int\limits_{t_1}^{t_2} I^2Rdt == \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{U^2}{R}dt \tag{2.10}$$

ІНДУКТИВНА КОТУШКА представляє собою пасивний двополюсник, що володіє властивістю накопичувати енергію у виді енергії магнітного поля. Умовне позначення індуктивної котушки подано на рис. 2.6. Основною кількісною мірою індуктивної котушки є індуктивність (коефіцієнт індукції) L. Індуктивністю називають також сам елемент.

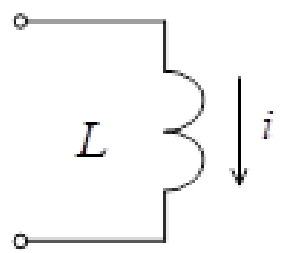

Рис. 2.6

Струм в обмотці котушки створює магнітний потік, що пронизує витки обмотки. Ураховуючи, що усі витки котушки пронизуються створеним нею магнітним потоком, впроваджується поняття потокозчеплення котушки

$$\psi = W\Phi \tag{2.11}$$

де W — число витків котушки, Φ — магнітний потік.

У котушці без залізного осердя магнітний потік зчеплення пропорційний струму в її обмотці

$$\psi = LI \tag{2.12}$$

де L — індуктивність котушки. Таким чином,

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{W\Phi}{I} \tag{2.13}$$

У системі СІ магнітний потік вимірюється у веберах (Вб), струм в амперах (А), індуктивністьу генрі (Гн). Кратні одиниці генрі: 1 мГн = 10^{-3} Гн; 1 мкГн = 10^{-6} Гн.

При зміні струму в котушці змінюється магнітний потік, що пронизує її. У котушці, згідно з законом електромагнітної індукції, наводяться ЕРС самоіндукції

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{2.14}$$

ЕРС самоіндукції направлена таким чином, що струм, викликаний нею, прагне перешкодити навідному потоку.

Зв'язок між струмом і напругою елемента згідно з законом електромагнітної індукції має вигляд

$$U = -e_L = L\frac{dI}{dt} \tag{2.15}$$

Напруга на індуктивній котушці визначається швидкістю зміни струму.

При проходженні через індуктивність постійного струму потік не змінюється, напруга дорівнює нулю, що рівнозначно закороченню затискачів елемента. Із (2.15) струм у будь-який момент часу

$$I = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} U dt \tag{2.16}$$

При $t = -\infty$, $I = 0$.

Потужність індуктивної котушки

$$P = UI = LI\frac{dI}{dt} \tag{2.17}$$

При співпаданні знаків струму і напруги має місце накопичення енергії, а потужність позитивна, при неспівпаданні знаків потужність від'ємна, що означає

віддачу накопиченої енергії.

Енергія, що накопичена в індуктивності

$$W_L = \int\limits_{-\infty}^{t} LI\frac{dI}{dt}dt = \int\limits_{0}^{t} LIdI = \frac{LI^2}{2} \tag{2.18}$$

Енергія в індуктивності визначається величиною струму в даний момент: вона пропорційна квадрату струму і тому не може мати від'ємних значень.

КОНДЕНСАТОР — пасивний двополюсник, головна властивість якого полягає в тому, що він може накопичувати енергію у формі енергії електричного поля. Конденсатор складається з двох пластин або двох провідників, розділених між собою діелектриком. Параметром конденсатора є ємність.

Якщо до конденсатора прикласти напругу, то на його обкладках з'являються заряди рівні за величиною і протилежні зазнаком. У діелектрику між обкладками створюється зв'язане з цими зарядами електричне поле. Так як напруженість електричного поля пропорційна напрузі між обкладками, то заряд на обкладках конденсатора буде пропорційний напрузі:

$$Q = CU \tag{2.19}$$

де C — ємність конденсатора. В системі СІ ємність вимірюється в фарадах ($C = Q/U$ [К/В=Ф]). Кратні одиниці ємності: 1 мкФ = 10^{-6} Ф; 1 пФ = 10^{-12} Ф. Умовні зображення конденсатора подані на рис. 2.7.

Рис. 2.7

Зв'язок між струмом і напругою для конденсатора можна отримати з (2.19), якщо продиференціювати обидві частини за часом

$$\frac{dQ}{dt} = I_c = C\frac{dU}{dt} \tag{2.20}$$

Струм у конденсаторі визначається швидкістю зміни напруги. У випадку постійної напруги струм через конденсатор дорівнює нулю. Якщо задається струм,

то з (2.20)

$$U = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} Idt = \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{0} Idt + \frac{1}{C}\int\limits_{0}^{t} Idt = U(0) + \frac{1}{C}\int\limits_{0}^{t} Idt \tag{2.21}$$

де $U(0)$ — початкова напруга на конденсаторі при $t = 0$.

Потужність у колі з конденсатором

$$P = UI = CU\frac{dU}{dt} \tag{2.22}$$

Потужність позитивна в інтервалах наростання енергії, коли вона надходить від джерела у конденсатор і від'ємна в інтервалах зменшення енергії, коли вона повертається джерелу.

Енергія, що накопичується в конденсаторі

$$W_C = \int\limits_{-\infty}^{t} CU\frac{dU}{dt}dt = \int\limits_{-\infty}^{t} CUdU = \frac{CU^2}{2}. \tag{2.23}$$

Енергія в конденсаторі пропорційна квадрату напруги і тому не може мати від'ємних значень.

2.1.4 Активні елементи кіл та їх характеристики

Активними елементами кола є джерела електричної енергії — генератори. Основними параметрами Генераторів є електрорушійна сила $\mathcal{E}$ і внутрішній опір R_i.

У генераторах має місце перетворення якого-небудь виду енергії в електричну. Наприклад, у гальванічних елементах і акумуляторах хімічна енергія перетворюється в електричну, в сонячних батареях — світлова енергія перетворюється в електричну і тому подібне. Всередині генераторів має місце вимушений поділ електричних зарядів різних знаків, що викликає виникнення всередині генератора електричного поля, а отже, і різниці потенціалів. Ця різниця потенціалів називається електрорушійною силою, величина ЕРС

$$\mathcal{E} = \frac{dW_c}{dQ} \tag{2.24}$$

де W_c — робота, що виконується сторонніми силами. У системі СІ ЕРС вимірюється у вольтах (Дж/К = В).

ЕРС генератора є причиною виникнення струму в електричному колі. Чисельно ЕРС генератора дорівнює різниці потенціалів між його затискачами у випадку, коли коло розімкнене і струм через генератор не протікає. За напрямок ЕРС приймається напрямок вимушеного руху позитивних зарядів усередині генератора, тобто напрямок від від'ємного полюса генератора до позитивного.

При переміщені зарядів усередині джерела, останні стикаються з різними частинками, тобто зазнають опору руху — R_i

Розрізняють джерела напруги і струму. Якщо внутрішній опір генератора малий у порівнянні з опором навантаження($R_i << R_н$), тоді його називають джерелом напруги (рис. 2.8).

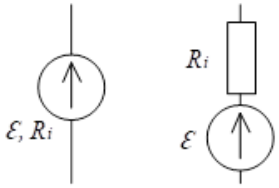

Рис. 2.8

Залежність $U = F(i)$ називають зовнішньою характеристикою джерела напруги. Її можна отримати за допомогою схеми рис. 2.9.

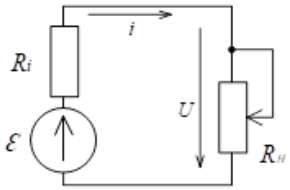

Рис. 2.9

За законом Ома

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_н}$$

$$I_{R_i} + I_{R_н} = \mathcal{E}.$$

Напруга на затискачах генератора рівна $U = I_{R_н}$. Тоді

$$U = \mathcal{E} - IR_i \tag{2.25}$$

Якщо $I = 0$ ($R_н = \infty$), $U_{xx} = \mathcal{E}$ — режим холостого ходу. Якщо $U = 0$ ($R_н = 0$), $I_k = \mathcal{E}/R_i$ — режим короткого замикання.

Графік зовнішньої характеристики подано на рис. 2.10.

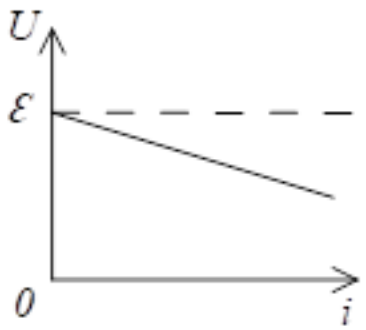

Рис. 2.10

У таких випадках, коли $R_i >> R_н$ струм що входить у зовнішнє коло, не залежить від опору навантаження. У цих випадках генератор зручно характеризувати не його ЕРС, а створеним ним струмом: $I_0 = \mathcal{E}/R_i$. У цьому випадку генератор називають джерелом струму. Його зовнішньою характеристикою є залежність $I = F(U)$ (рис. 2.11).

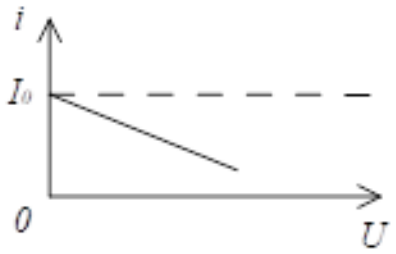

Рис. 2.11

Умовне зображення джерела струму подано на рис. 2.12.

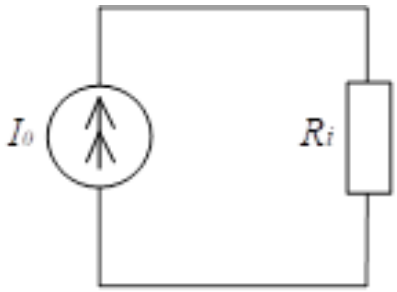

Рис. 2.12

Завжди можна джерело напруги замінити еквівалентним джерелом струму і навпаки. Дійсно, рівняння (2.25) поділимо на R_i

$$\frac{U}{R_i} = \frac{\mathcal{E}}{R_i} - I$$

Звідси

$$I = I_0 - g_i U \tag{2.26}$$

Якщо $U = 0$, $I = I_0$ ($R_н = 0$) — режим короткого замикання. Якщо $I = 0$ ($R_н = \infty$), $I_0 = U/R_i$ — режим холостого ходу.

Рівнянню (2.26) відповідає схема (рис. 2.13). Оскільки рівняння (2.25) і (2.26) еквівалентні, то і схеми (рис. 2.12, 2.13) еквівалентні.

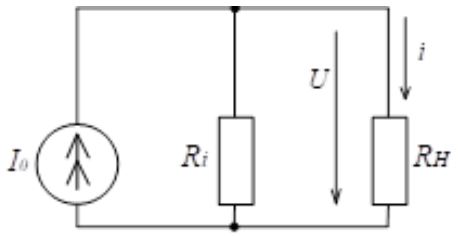

Рис. 2.13

Джерела струму і джерела напруги не еквівалентні у відношенні потужності. Якщо $R_н = \infty$, то в джерелі ЕРС $P_{xx} = 0$, а в джерелі струму $P_{xx} = U^2/R_i$.

2.2 Основні закони електричних кіл

2.2.1 Закон Ома і вольт-амперна характеристика двополюсника

Властивості будь-якого електричного кола можуть бути визначені з аналізу рівнянь, складених для кола на підставі відповідних фізичних законів. Основними законами електричних кіл, що дають можливість описати будь-які режими їх роботи, є закон Ома і закони Кірхгофа.

ЗАКОН ОМА для ділянки кола з резистором опору R (рис. 2.14)

$$I = \frac{U_{ab}}{R} \tag{2.27}$$

де U_{ab} — напруга на ділянці кола, що розглядається.

Залежність струму від напруги називають вольт-амперною характеристикою двополюсника (рис. 2.15). Як випливає з рівняння (2.27), кут нахилу прямої лінії

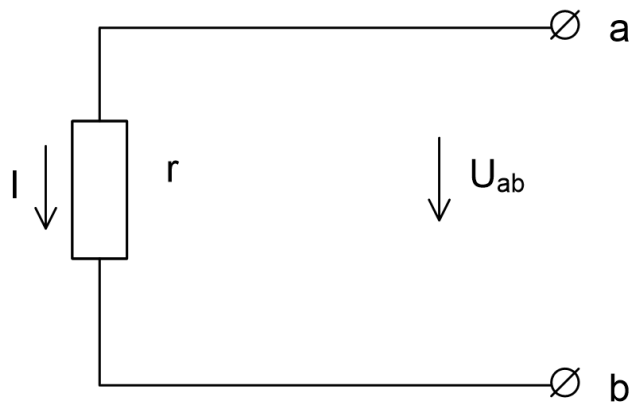

Рис. 2.14

залежить від опору резистора R:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{R}. \tag{2.28}$$

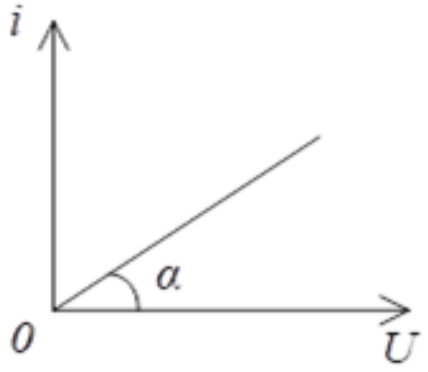

Рис. 2.15

Якщо опори резисторів, індуктивності котушок і ємності конденсаторів, що складають коло, не залежать від струмів у них, від прикладених до них напруг, від напрямку цих струмів і напруг, то кожний із елементів кола і все електричне коло називаються ЛІНІЙНИМ.

Якщо значення параметрів елементів кола, незалежні від струмів і напруг на цих елементах, змінюються з часом, коло називається ПАРАМЕТРИЧНИМ.

Якщо значення параметрів елементів кола змінюються при зміні струму або напруги, то такі елементи називають НЕЛІНІЙНИМИ, а відповідні кола нелінійними колами. Для нелінійних кіл закон Ома не дійсний. Приклади нелі-

нійних елементів: індуктивна котушка з залізним осердям, напівпровідниковий резистор.

2.2.2 Закон Ома для кола з декількома джерелами ЕРС

Нехай нерозгалужене коло утримує послідовно ввімкнені резистори і джерела ЕРС (рис. 2.16)

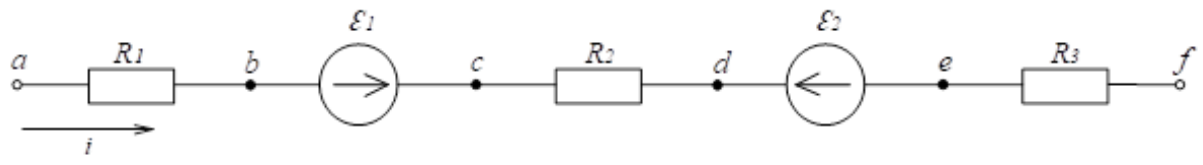

Рис. 2.16

Згідно з законом Ома для ділянки кола можемо записати такі співвідношення:

$$U_{ab} = R_1 I, \quad U_{bc} = -\mathcal{E}_1, \quad U_{cd} = R_2 I, \quad U_{de} = \mathcal{E}_2, \quad U_{ef} = R_3 I$$

Складемо всі рівняння і врахуємо, що через усі елементи кола проходить один і той же струм (послідовне коло)

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{de} + U_{ef} = U_{ab} = (R_1 + R_2 + R_3)I + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1.$$

Звідси

$$I = \frac{U_{af} + \sum \mathcal{E}}{\sum R} \tag{2.29}$$

де $\sum \mathcal{E}$ — алгебраїчна сума ЕРС у колі, $\sum R$ — сума опорів кола. Рівняння (2.29) є узагальнений закон Ома. Для замкненого кола $U_{af} = 0$, тому рівняння (2.29) перепишеться наступним чином

$$I = \frac{\sum \mathcal{E}}{\sum R} \tag{2.30}$$

2.2.3 Закони Кірхгофа

Схемою електричного кола є графічне зображення кола, що утримує умовні позначення її елементів і показує їх з'єднання між собою. Геометрична конфігурація схеми характеризується такими поняттями, як вітка, вузол, контур.

ВІТКА —- ділянка електричного кола, вздовж якої тече один і той же струм.

ВУЗОЛ —- місце сполучення віток електричного кола. Коло (рис. 2.17) утримує 7 віток і 4 вузла (a,b,c,d).

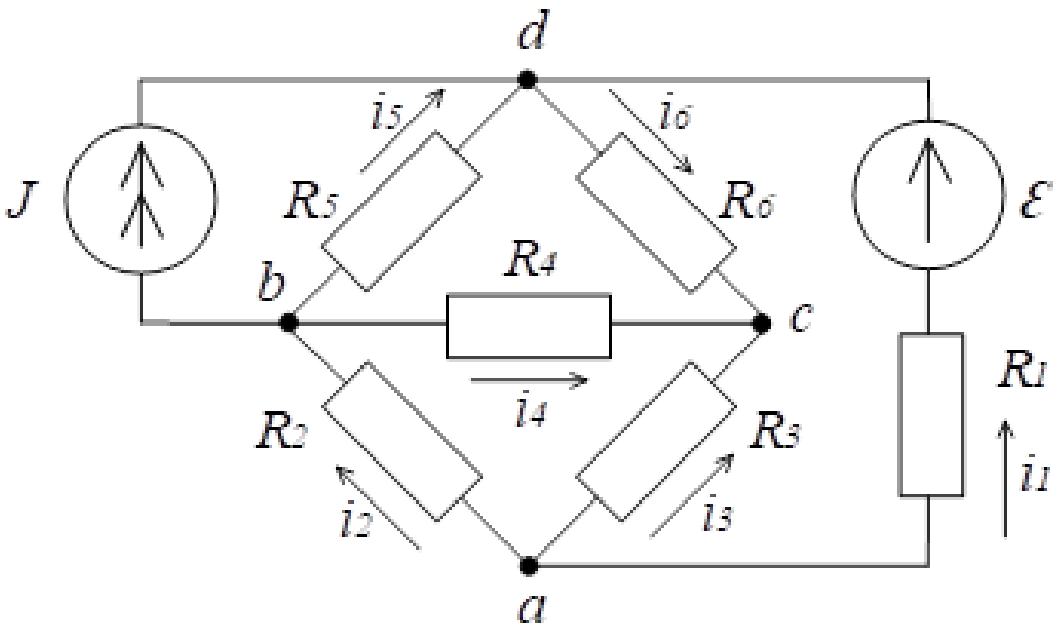

Рис. 2.17

ПЕРШИЙ ЗАКОН КІРХГОФА застосовується до вузлів електричного кола: сума струмів, що надходить до вузла дорівнює сумі струмів, що відходить від вузла, або —- алгебраїчна сума струмів, що сходяться до вузла, дорівнює нулю. Струми, що направлені до вузла, мають позитивний знак, а струми, що направлені від вузла —- негативний знак.

Наприклад, для вузлів схеми рис. 2.17 можна записати наступні рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$(a) \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0, \quad (b) \quad i_2 - i_4 - i_5 - J = 0, \quad (d) \quad J + i_5 - i_6 + i_1 = 0.$$

ДРУГИЙ ЗАКОН КІРХГОФА застосовується до контурів електричного кола і говорить, що алгебраїчна сума ЕРС контуру дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруги:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k = \sum_{m=1}^{n} U_m. \tag{2.31}$$

Перш ніж застосовувати другий закон Кірхгофа домовляються про позитивний напрямок обходу контуру — за годинниковою стрілкою, чи навпаки. Якщо при обході контуру ЕРС чи напруга співпадають з вибраним позитивним напрямком, їм приписується знак плюс, якщо ж не співпадає — знак мінус. Наприклад, для контурів рис. 2.17:

$$\begin{aligned}(abcd):&\quad R_2 i_2 + R_4 i_4 - R_3 i_3 = 0,\\(acdb):&\quad R_3 i_3 - R_6 i_4 - R_1 i_1 = -\mathcal{E}.\end{aligned}$$

2.2.4 Режими роботи електричного кола

У залежності від частоти джерела енергії можливо виділити такі режими роботи кіл: 1) при постійних ЕРС і струмах; 2) при змінних ЕРС і струмах; 3) при короткочасних діях ЕРС і струмів — імпульсний режим роботи.

У залежності від характеру електромагнітних процесів, що протікають у колі, розрізняють усталений (стаціонарний) і перехідний (нестаціонарний) режими. У випадку усталеного режиму струми у вітках і напруги на окремих ділянках кола змінюються за таким же законом, як і прикладена ЕРС. Наприклад, при постійних ЕРС струми і напруги постійні, при синусоїдальних ЕРС струми і напруги також будуть синусоїдальними.

У випадку перехідного режиму електричне коло переходить від одного усталеного режиму до другого усталеного режиму. Наприклад, перехідний режим, або як ще кажуть, перехідний процес має місце при вмиканні або вимиканні, електричного кола, при стрибкоподібній зміні параметра якого-небудь елемента кола.

У залежності від величини опору навантаження розрізняють чотири режими роботи: холостого ходу, короткого замикання, узгодження і номінальний (рис. 2.18).

У режимі холостого ходу $R_H = \infty$ (ключ K розімкнений), струм $I = 0$, а отже і потужність кола $P = \mathcal{E} I = 0$.

У режимі короткого замикання (ключ K замкнений) $R_H = 0$, струм у колі $I_k = \mathcal{E}/I$ досягає найбільш можливого значення, а потужність, що виділяється у вигляді тепла на опорі R_i, $P_i = I_k^2 R_i$.

У режимі узгодження опір R_H вибирають такої величини, щоб потужність, яка ним споживається, досягала найбільшого значення. Для знаходження умови

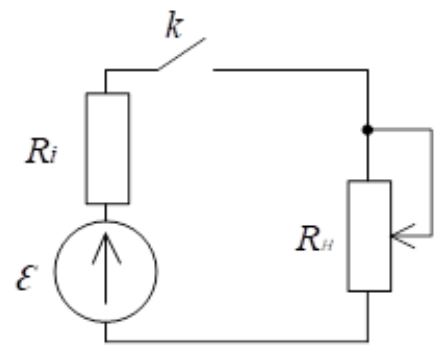

Рис. 2.18

узгодженості визначимо струм у колі і потужність, що вибіляється в опорі R_H:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R_H}, \quad P_H = I^2 R_H = \frac{\mathcal{E}^2 R_H}{(R_i + R_H)^2} \tag{2.32}$$

Із рівняння (2.32) видно, що у режимі холостого ходу ($R_H = \infty$), $P_H = 0$ і у режимі короткого замикання ($R_H = 0$) $P_H = 0$, отже існує значення R_H при якому P_H досягає максимального значення. Проведемо дослідження виразу для R_H на екстремум:

$$\frac{dP_H}{dR_H} = 0, \quad \frac{d}{dR_H}\left(\frac{\mathcal{E}^2 R_H}{(R_i + R_H)^2}\right), \quad R_H = R_i.$$

Таким чином, в опорі навантаження потужність досягає максимального значення, якщо $R_H = R_i$ (рис. 2.19).

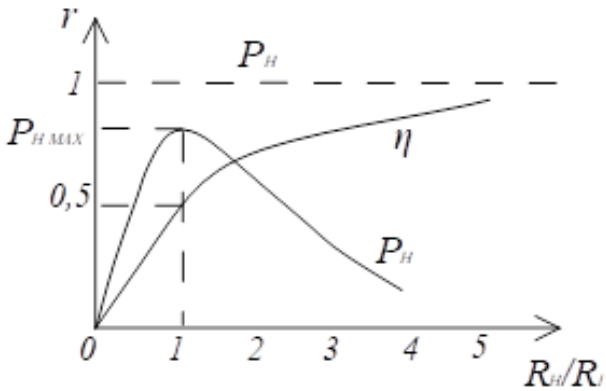

Рис. 2.19

Як випливає з виразу (2.32)

$$P_{Hmax} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_H}. \tag{2.33}$$

Знайдемо коефіцієнт корисної дії (ККД) схеми:

$$\eta = \frac{P_H}{P} = \frac{I^2 R_H}{I^2(R_H + R_i)} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_i}{R_H}}. \tag{2.34}$$

Для узгодженого режиму ($R_H = R_i$), $\eta = 0{,}5$, тобто всього 50%. що надто мало. Як випливає з рівняння (2.34) для збільшення ККД необхідно збільшувати R_H. Якщо $R_H >> R_i$ то η наближається до одиниці (рис. 2.19).

У телефонній мережі, де струми і потужності малі, вигідно працювати в режимі узгодження. Режим узгодження часто використовується у радіотехнічних колах, наприклад, у підсилювачах потужності. В енергетичній системі, де струми і потужності великі, важливе економічне значення має величина ККД і тому, як правило, працюють при умові наближення ККД до одиниці ($R_H >> R_i$).

При номінальному режимі всі елементи кола працюють у нормальних для них умовах. Частіше ці умови визначаються мірою нагрівання струмонесучих елементів та ізоляції.

2.3 Методи розрахунку складних кіл постійного струму

2.3.1 Метод еквівалентних перетворень

Суть методу перетворень полягає в тому, що дійсна схема замінюється еквівалентною, більш простою схемою. Нагадаємо, що еквівалентним називають таке перетворення, при якому напруга і струми в тих частинах схеми, які не піддали під перетворення, залишаються незмінними.

До числа добре відомих із курсу фізики відносяться перетворення послідовних і паралельних сполучень пасивних елементів кіл або ділянок кіл, які дають змогу “згорнути” схему.

З’єднання елементів називається послідовним, якщо через них протікає один і той же струм. Еквівалентний опір кола, яке складається із n послідовно з’єднаних опорів, рівний сумі цих опорів:

$$R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{2.35}$$

При послідовному з'єднанню n опорів напруга на них розподіляється прямо пропорційно цим опорам:

$$U_1 : U_2 : \ldots : U_n = R_1 : R_2 : \ldots : R_n. \tag{2.36}$$

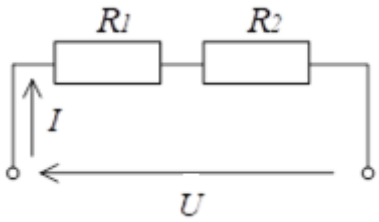

Рис. 2.20

Зокрема у випадку двох послідовно з'єднаних опорів (рис. 2.20):

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \tag{2.37}$$

де U — загальна напруга на ділянці кола, що містить опори R_1 і R_2.

З'єднання елементів є паралельним, якщо всі вони під'єднані до однієї пари вузлів.

Еквівалентний опір кола, що складається із n паралельно з'єднаних опорів, визначається за формулою

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}. \tag{2.38}$$

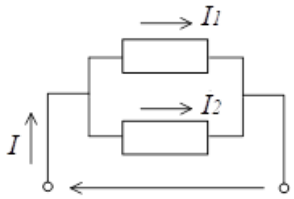

Рис. 2.21

У випадку паралельного з'єднання двох опорів R_1 та R_2 (рис. 2.21) еквівалентних опір рівний

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.39}$$

При паралельному з'єднанню n опорів струми в них розподіляються обернено пропорційно їх опорам чи прямо пропорційно їх провідностям:

$$I_1 : I_2 : \ldots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \ldots : \frac{1}{R_n} = G_1 : G_2 : \ldots : G_n. \tag{2.40}$$

Струм I_s в кожній паралельній вітці визначається через струм I у нерозгалудженій частині кола:

$$I_s = I \frac{G_s}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k}. \tag{2.41}$$

В електричних колах зустрічаються сполучення опорів трикутником і зіркою (рис. 2.22). При розрахунках таких кіл іноді виникає потреба в перетворені трикутника в еквівалентну зірку, або навпаки.

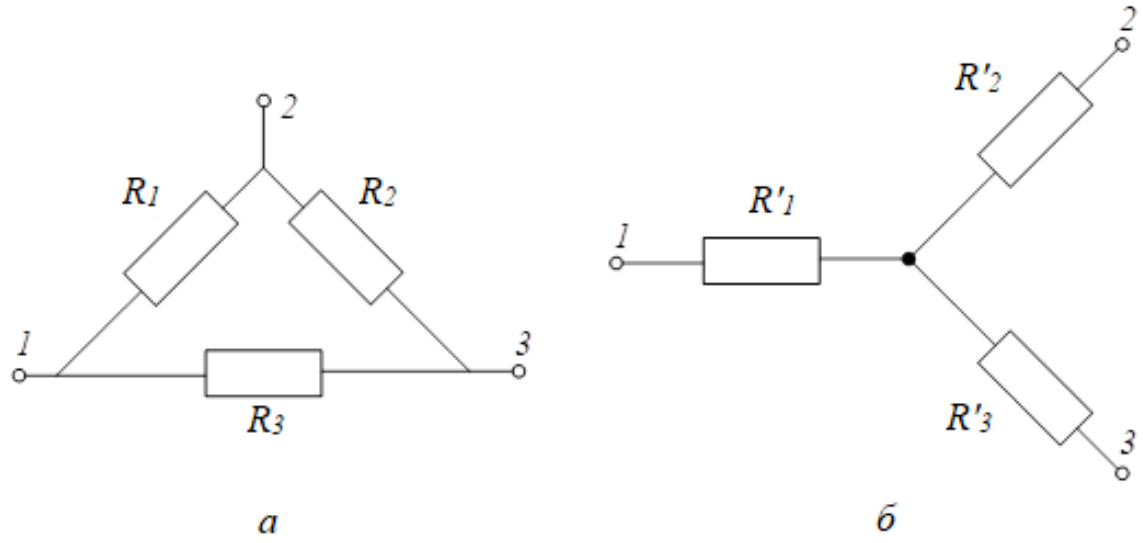

Рис. 2.22

Трикутник і зірка опорів будуть еквівалентні в тому випадку, якщо заміна одного сполучення другим не змінює струмів у решті ділянок кола. Отже, необхідно і достатньою умовою еквівалентності трикутника і зірки буде рівність результуючих опорі між кожною парою вузлів. Так, для вузлів 1 і 2 (рис. 2.22а)

маємо опори R_1 і $R_2 + R_3$ сполучені паралельно, отже

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}; \quad R_{12} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Для схеми (рис. 2.22б) $R_{12} = R_1' + R_2'$. Таким чином

$$R_1' + R_2' = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Аналогічно

$$R_1' + R_3' = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_2' + R_3' = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно R_1', R_2' і R_3', отримаємо

$$R_1' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_2' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_3' = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{2.42}$$

Отримані вирази показують, що опори будь-якого променя еквівалентної зірки будуть рівні добутку двох опорів трикутника, які прилягають до того ж вузла, поділеному на суму опорів трикутника. Якщо опори трикутника рівні, то і опори еквівалентної зірки також будуть рівними, причому $R_Y = R_\Delta/3$.

Щоб розв'язати обернену задачу заміни зірки еквівалентним трикутним, необхідно у системі рівнянь (2.42) опори R_1, R_2, R_3 виразити через R_1', R_2' і R_3':

$$R_1 = R_1' + R_2' + \frac{R_1' R_2'}{R_3'}, \quad R_2 = R_2' + R_3' + \frac{R_2' R_3'}{R_1'}, \quad R_3 = R_3' + R_1' + \frac{R_3' R_1'}{R_2'}. \tag{2.43}$$

Якщо $R_1' = R_2' = R_3'$, то $R_\Delta = 3R_Y$.

2.3.2 Метод рівнянь Кірхгофа

Розглянемо електричне коло, що має α вузлів, n віток, N_J джерел струму. Треба знайти $n - N_J$ струмів, якщо значенні опорів і ЕРС задані. Цю задачу можна розв'язати, користуючись законами Кірхгофа.

При складанні рівнянь Кірхгофа на підставі першого і другого законів рекомендується дотримуватися такої послідовності: спочатку вибираються довільні позитивні напрямки струмів у всіх вітках електричного кола, потім складаються рівняння для вузлів на підставі першого закону Кірхгофа і нарешті, складаю-

ться рівняння для контурів на підставі другого закону.

Застосовуючи до вузлів перший закон Кірхгофа, можна скласти тільки $\alpha-1$ рівнянь струмів. Дійсно, так як будь-яка вітка зв'язує лише два вузла, то струм кожної вітки повинен обов'язково ввійти в ці рівняння два рази і при тому з протилежними знаками. Отже, сума лівих частин всіх α рівнянь дає тотожній нуль. Інакше кажуть, одне із α рівнянь може бути одержано як наслідок останніх $\alpha-1$ рівнянь. Таким чином, число взаємно незалежних рівнянь, що випливає з першого закону, дорівнює $\alpha - 1$, тобто на одиницю менше числа вузлів.

Інші $n - (\alpha - 1) - N_J$ рівнянь складаються на підставі другого закону для $n - (\alpha - 1) - N_J$ контурів. При складанні цих рівнянь потрібно звернути увагу на те щоб вони були взаємно незалежні. Для виконання цієї умови необхідно, щоб у кожний новий контур, для якого складається рівняння, входила хоча б одна нова вітка, яка не входила ще ні в один із раніше розглянутих контурів.

Якщо при рішенні складених таким чином $n - N_J$ рівнянь для струму в якій-небудь вітці одержано від'ємне значення, то це вказує на те, що струми у цій вітці має напрям протилежний тому, який був довільно прийнятий за позитивний.

Недолік методу рівнянь Кірхгофа — громіздкість, через те, що у випадку складний електричних кіл потрібно розв'язувати велику систему рівнянь.

2.3.3 Метод контурних струмів

В основі методу лежать закони Кірхгофа і для припущення: 1) у кожному контурі протікають незалежні один від одного розрахункові струми, які називаються контурними; 2) струм кожної вітки визначається алгебраїчною сумою контурних струмів, що замикаються через цю вітку.

При користуванні методом контурних струмів закон Кірхгофа виконується автоматично, тому що кожний із контурних струмів в одній вітці має напрямок до вузла, а в другій — від вузла. А тому рівняння з контурними струмами складають тільки за другим законом Кірхгофа, причому число необхідних рівнянь визначається за формулою: $k = n - \alpha + 1$, де n — число віток, α — число вузлів. Напрямки контурних струмів обираються довільними, а напрями обходу контурів — такими ж, як і напрями струмів.

Будемо вважати, що при складанні рівнянь на підставі другого закону Кірхгофа у кожне з них входять всі контурні струми кола, що розглядаються, але опори, які стоять при них як коефіцієнти, будуть дорівнювати нулю, якщо контури не є суміжними.

Суми опорів, що входять в i-й контур, домовимося позначати R_{ii} і називати

власним опором контуру i. Суми опорів у загальній вітці контурів i та j будемо позначати R_{ij}. Опір R_{ij} будемо вважати позитивним, якщо позитивні напрямки струмів $\mathcal{I}_i$ та $\mathcal{I}_j$ у загальній вітці зберігаються, і від'ємні, якщо вони протилежні.

Для кола, що складається з контурів, отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} R_{11}\mathcal{I}_1 & +R_{12}\mathcal{I}_2 & +\ldots+ & R_{1k}\mathcal{I}_k & =\mathcal{E}_1, \\ R_{21}\mathcal{I}_1 & +R_{22}\mathcal{I}_2 & +\ldots+ & R_{2k}\mathcal{I}_k & =\mathcal{E}_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{k1}\mathcal{I}_1 & +R_{k2}\mathcal{I}_2 & +\ldots+ & R_{kk}\mathcal{I}_k & =\mathcal{E}_k, \end{cases} \tag{2.44}$$

Тут $\mathcal{E}_i$ — алгебраїчна сума ЕРС i-го контуру.

Розв'язок системи (2.44) для довільного струму $\mathcal{I}_i$ має вигляд:

$$\mathcal{I}_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{2.45}$$

де визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{k1} & R_{k2} & \ldots & R_{kk} \end{vmatrix}. \tag{2.46}$$

А визначник Δ_i одержуємо із Δ шляхом заміни опорів його i-го стовпчика на ЕРС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, …, $\mathcal{E}_k$. Формула (2.45) служить для визначення будь-якого контурного струму, при цьому визначник системи (2.46) можна скласти безпосередньо за схемою.

Якщо в схемі є вітка з довільним струмом, то цей струм слід зробити контурним, завдяки чому число рівнянь стане на одне менше.

2.3.4 Метод вузлових потенціалів

Метод вузлових потенціалів ґрунтується на першому законі Кірхгофа і законі Ома. Виконання другого закону Кірхгофа забезпечується автоматично завдяки тому, що струми у вітках виражаються через різницю потенціалів і ЕРС. Якщо електричне коло має $\alpha+1$ вузлів, то на підставі першого закону Кірхгофа можна скласти тільки α незалежних рівнянь. Потенціал $\alpha+1$ вузла приймається за нуль. Таке припущення не вплине на розподіл струмів у колі, тому що струм у будь-якій вітці залежить не від абсолютного значення потенціалів вузлів, між якими вона ввімкнена, а від різниці потенціалів.

Виразивши струми у рівняннях, складених за першим законом Кірхгофа, через різниці потенціалів на затискачах віток, одержимо систему α рівнянь по

відношенню до α невідомих потенціалів вузлів, знаючи які, вже не важко, скориставшись законом Ома, знайти струм у вітках.

У загальному випадку, для будь-якої схеми, що утримує $\alpha+1$ вузол, рівняння можуть бути записані в такій формі:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_1 & +G_{12}\varphi_2 & +\ldots+ & G_{1\alpha}\varphi_\alpha & =\mathcal{J}_1, \\ G_{21}\varphi_1 & +G_{22}\varphi_2 & +\ldots+ & G_{2\alpha}\varphi_\alpha & =\mathcal{J}_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{\alpha 1}\varphi_1 & +G_{\alpha 2}\varphi_2 & +\ldots+ & G_{\alpha\alpha}\varphi_\alpha & =\mathcal{J}_\alpha, \end{cases} \tag{2.47}$$

де G_{ii} — сума провідностей віток, що сходяться до i-го вузла; G_{ij}=G_{ji} — сума провідностей віток, що сполучають вузли i та j взяті зі знаком "мінус"; $\mathcal{J}_i$ — вузловий струм, що утворюються у вигляді алгебраїчних сум струмів активних віток, що сходяться до i-го вузла. Вузловий струм можна записати як

$$\mathcal{J}_i = \sum \mathcal{E}G + \sum J,$$

де $\sum \mathcal{E}G$ — алгебраїчна сума добутку ЕРС віток, що примикають до i-го вузла, на їх провідності. При цьому зі знаком "плюс"беруться ті з добутків $\mathcal{E}G$, у вітках яких ЕРС діють у напрямі вузла i, і зі знаком "мінус— в напряму від вузла i. $\sum J$ — алгебраїчна сума джерел струму, що приєднані до вузла i; при цьому зі знаком "плюс"беруться ті J, які направлені до вузла i, а зі знаком "мінус— в напрямку від вузла i.

Із системи (2.47) за допомогою визначників знаоходимо потенціали вузлів.

$$\varphi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \varphi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots \quad \varphi_\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \tag{2.48}$$

де Δ — визначник системи, а Δ_i — той же визначник i-й стовпчик, якого замінено стовпчиком вузлових струмів. Струми у вітках знаходимо за узагальненим законом Ома:

$$I_{ij} = G_{ij}\left(\varphi_i - \varphi_j + \sum \mathcal{E}_{ij}\right). \tag{2.49}$$

В окремому випадку, коли схема має всього два вузли (для визначеності 1 та 2), метод вузлових потенціалів дозволяє скласти всього одне рівняння, незалежно від числа активних і пасивних віток, увімкнених паралельно. Якщо прийняти $\varphi_2 = 0$, то одержимо

$$U_{12} = \frac{\sum\limits_n \mathcal{E}_n g_n + \sum\limits_n J_n}{\sum\limits_m g_m}, \tag{2.50}$$

де g_i — провідність i-ої вітки.

2.3.5 Метод суперпозиції

При аналізі лінійних електричних кіл широко використовується принцип суперпозиції, згідно з яким струм у будь-якій вітці складної схеми можна подати у виді алгебраїчної суми частинних струмів, що викликаються дією кожної ЕРС окремо. Дійсно, нехай схема утримує n контурів і будь-яку кількість джерел. Тоді струм, в довільно вибраній k-й вітці, якщо вважати його контурним, можна визначити із системи рівнянь для контурних струмів:

$$J_k = J_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & \mathcal{E}_1 & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & \mathcal{E}_2 & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & \mathcal{E}_n & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} = \mathcal{E}_1\frac{\Delta_{1k}}{\Delta} + \mathcal{E}_2\frac{\Delta_{2k}}{\Delta} + \dots +$$

$$+ \mathcal{E}_n\frac{\Delta_{nk}}{\Delta} = \mathcal{E}_1 G_{1k} + \mathcal{E}_2 G_{2k} + \dots + \mathcal{E}_n G_{nk} = I_k^{'} + I_k^{''} + \dots + I_k^n \quad (2.51)$$

При розрахунку кіл методом накладання (суперпозиції) по-черзі розглядають дію кожного джерела окремо. Інші джерела при цьому виключаються із схеми, але їхні внутрішні опори зберігаються. Отже, при виключенні джерел ЕРС його затискачі закорочуються, а вітки з ідеальними джерелами струмів розмикаються.

2.3.6 Метод еквівалентного генератора

Іноді виникає потреба знайти струм в одній вітці складного електричного кола, не розраховуючи струми в інших вітках. У цьому випадку електрична схема по відношенню до виділеної вітки є активний двополюсник (рис. 2.23, а)

Згідно з теоремою Тевенена, активний двополюсник можна замінити еквівалентним генератором (рис. 2.23, б), ЕРС якого дорівнює напрузі холостого ходу на затискачах двополюсника (рис. 2.23, в), а внутрішній опір рівний вхідному опору того же двополюсника, але із схеми якого видалені всі джерела (рис. 2.23, г); при цьому власні опори джерел ЕРС в схемі зберігаються. Із схеми (рис. 2.23, б) за законом Ома струм у пасивній вітці:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_i + R}. \quad (2.52)$$

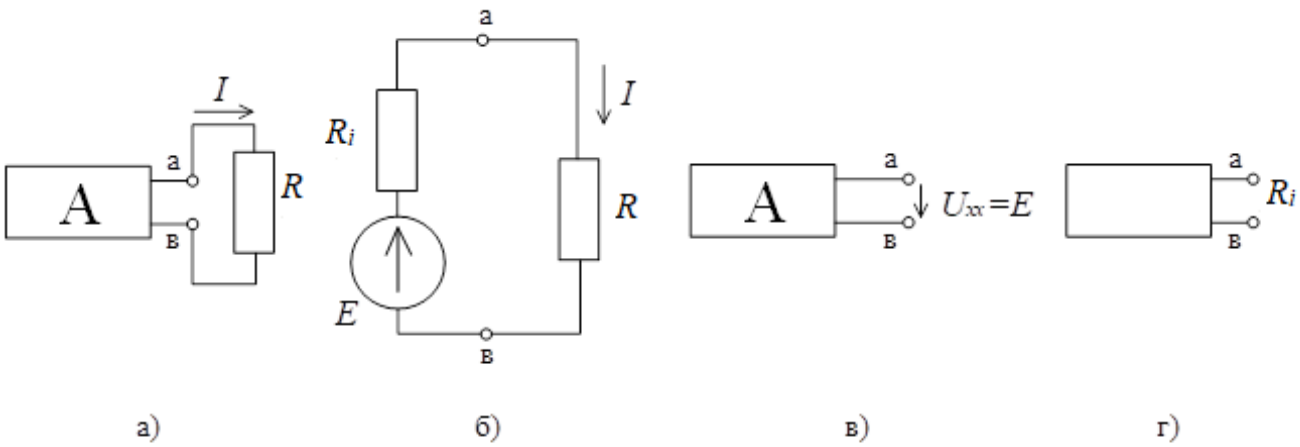

Рис. 2.23

Для доказу теореми Тевенена скористаємося принципом суперпозиції. Хай по опору R протікає струм I. Цей струм можна зробити рівним нулю, розірвавши вітку або ж увімкнувши в неї генератор з ЕРС $\mathcal{E} = -U_{xx}$, який створить струм такої ж величини I, але зворотного напрямку. А тому якщо ввімкнути послідовно з опором R два джерела ЕРС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = -U_{xx}$, направлених на зустріч один одному, то струм I при цьому не зміниться (рис. 2.24, а).

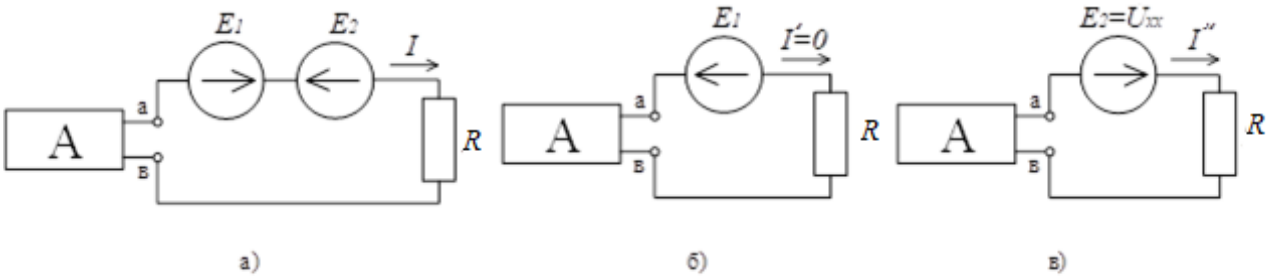

Рис. 2.24

У відповідності з принципом суперпозиції схему (рис. 2.24, а) можна подати у виді двох допоміжних схем, в одній з яких діє ЕРС $\mathcal{E}_1$ і всі джерела активного двополюсника (рис. 2.24, б), а в другій діє тільки ЕРС $\mathcal{E}_2$ і активний двополюсник стає пасивним (рис. 2.24, в).

За принципом суперпозиції струм I в схемі (рис. 2.24, а) дорівнює сумі частинних струмів допоміжних схем: $I = I' + I''$. Так як $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = U_{xx}$, то в схемі

(рис. 2.24, б) струм $I^{'} = 0$, що випливає із закону Ома: $I^{'} = (U_{xx} - \mathcal{E}_1)/R$. Отже струм $I = I^{''}$ і за законом Ома визначається з рівняння (2.52), тобто дійсно схему (рис. 2.24, а) можна замінити схемою (рис. 2.24, б).

Параметри еквівалентного генератора $\mathcal{E}$ і R визначаються з досліду, або шляхом розрахунків.

Замість еквівалентного генератора напруги можна використати заміну на еквівалентний генератор струму з параметрами J та R_e, які визначаються наступним чином:

$$J = I_{\text{к.з.}}, \quad R_e = \frac{U_{xx}}{I_{\text{к.з.}}}. \tag{2.53}$$

3 Приклади розв'язання задач

3.1 Розрахунок еквівалентних опорів

3.1.1 Для кола зображеному на рис. 3.1 знайти еквівалентні опори між затискачами a і b, c і d, d і f, якщо $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 5$ Ом, $r_3 = 15$ Ом, $r_4 = 30$ Ом, $r_5 = 6$ Ом.

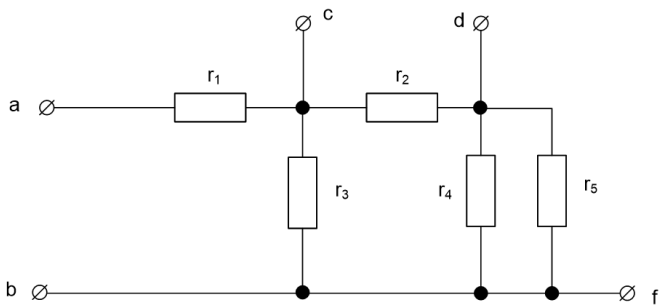

Рис. 3.1

Розв'язання. *Розрахунок опору* r_{ab}. Еквівалентний опір з'єднаних паралельно опорів r_4 і r_5 рівний:

$$r_{45} = \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5 \text{ Ом}.$$

Вони з'єднані послідовно з r_2. Їх загальний опір $r' = r_2 + r_{45} = 5 + 5 = 10$ Ом.

Опір кола складається з опору r_1 з яким послідовно з'єднані два паралельних опори r' та r_3 :

$$r_{ab} = r_1 + \frac{r' r_3}{r' + r_3} = 6 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 12 \text{ Ом}.$$

Розрахунок опору r_{cd}. Опір r_4 та r_5 з'єднані паралельно один до одного, опір r_3 під'єднано до них послідовно:

$$r'' = r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = 15 + 5 = 20 \text{ Ом}.$$

Опір r_{cd} складається з двох паралельно ввімкнених r_2 та r'' і дорівнює

$$r_{cd} = \frac{r_2 r''}{r_2 + r''} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом}.$$

Розрахунок опору r_{dF}. Еквівалентний опір кола між точками d та f складається з трьох паралельно ввімкнених опорів r_5, r_4 та $r_2 + r_3$ і його можна знайти з формули (2.38):

$$\frac{1}{r_{df}} = \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_2 + r_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}, \text{ звідки } r_{df} = 4 \text{ Ом}.$$

3.1.2 Розрахувати еквівалентний опір кола між точками a і b при розімкненому та замкненому ключі K (рис. 3.2, а).

Дано: $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = 10$ Ом.

Розв'язання. При розімкненому ключі схема може бути зображена згідно рис. 3.2, б.

Шуканий опір

$$r_{ab} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + = \frac{(r_5 + r_6 + \frac{r_4 r_7}{r_4 + r_7}) r_2}{r_5 + r_6 + \frac{r_4 r_7}{r_4 + r_7}} = 5 + \frac{25 \cdot 10}{35} = 12{,}1 \text{ Ом}.$$

При замкненому ключі задана схема може бути зображена згідно рис. 3.2, в.

Опір кола r'_{ab} дорівнює сумі двох опорів:

$$r' = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} = \frac{10 \cdot 10}{20} = 5 \text{ Ом}$$

і r'', визначаємо з формули

$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_7} + \frac{1}{r_2},$$

звідки $r'' = 3{,}33$ Ом.

Таким чином,

$$r'_{ab} = r' + r'' = 5 + 3{,}33 = 8{,}33 \text{ Ом}$$

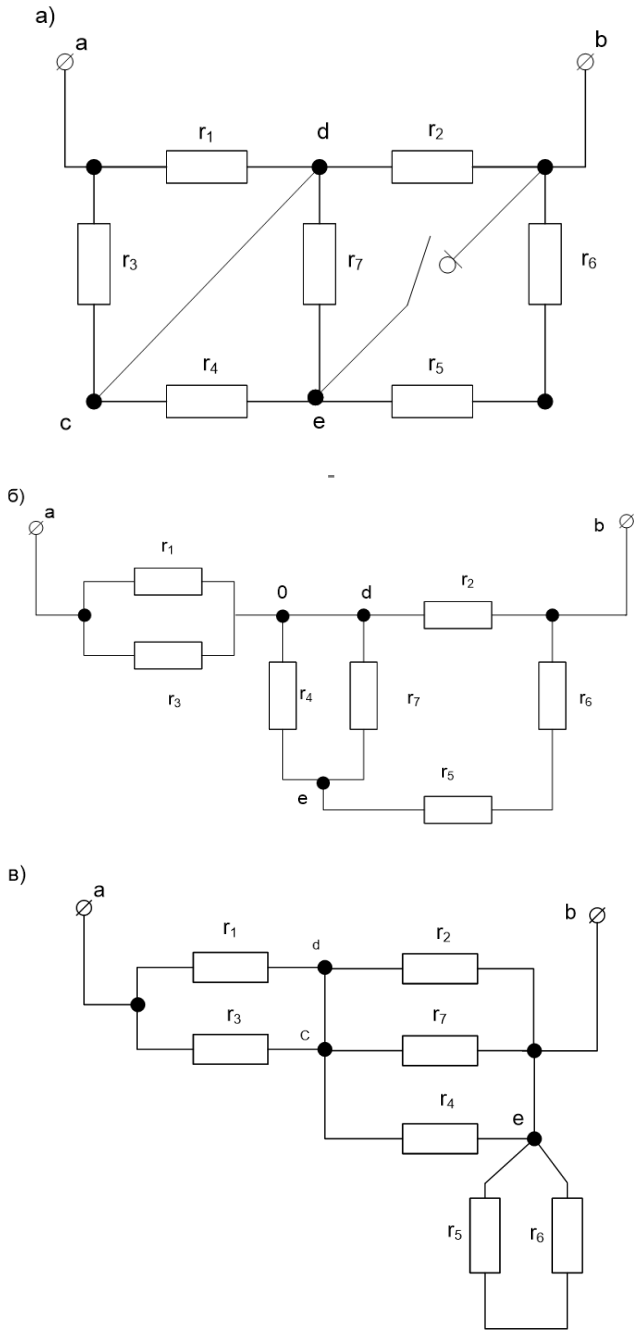

Рис. 3.2

3.1.3 Знайти опір між затискачами a та b для схеми рис.3.3, а. Значення опору в омах дані на схемі.

Розв'язання. З даної схеми можна перейти до більш простих схем, які зображені на рис. 3.3, б та в.

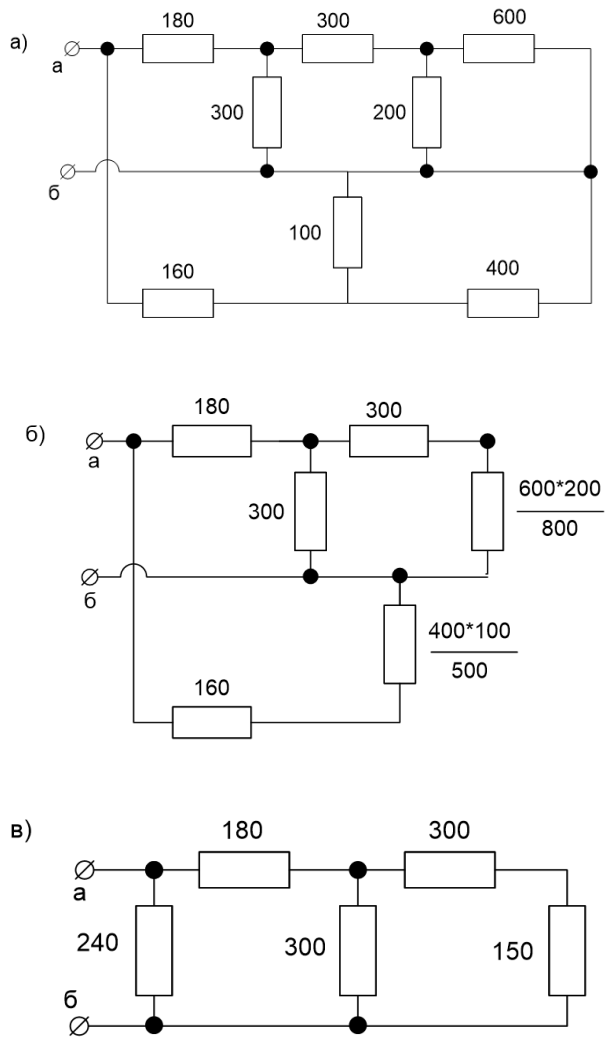

Рис. 3.3

Шуканий опір

$$r_{ab} = \frac{240(180 + \frac{300 \cdot 450}{750})}{240 + 180 + \frac{300 \cdot 450}{750}} = 144 \text{ Ом}.$$

3.2 Закони Ома і Кірхгофа. Баланс потужностей

3.2.1 Джерело з е.р.с. $E = 100$ в, внутрішній опір $r_0 = 1$ Ом замкнений на зовнішній опір r, який змінюється від нуля до нескінченності (рис. 3.4, а).

Визначити в функції цього опору: струм I; напругу на затискачах джерела

U; потужність, які виділяє джерело в зовнішне коло, $P_{\text{зов}}$; потужність, витрачену в самому джерелі, $P_{\text{вн}}$; загальну потужність $P_{\text{заг}}$; к.к.д η. При якому зовнішньому опорі потужність $P_{\text{зовн}}$ буде максимальною? Чому буде дорівнювати?

Побудувати криву: $I = F_1(r), U = F_2(r), P_{\text{зовн}} = F_3(r), P_{\text{вн}} = F_4(r)$. $P_{\text{заг}} = F_5(r), \eta = F_6(r)$.

Написати рівняння і побудувати криві залежностей U, $P_{\text{зовн}}$, $P_{\text{вн}}$, $P_{\text{заг}}$ і η в функції струму I.

Розв'язання.

$$I = \frac{E}{r + r_0} = \frac{100}{r + 1};$$

$$U = rI = \frac{Er}{r + r_0} = \frac{100r}{r + 1};$$

$$P_{\text{зовн}} = I^2 r = \frac{E^2 r}{(r + r_0)^2} = \frac{10\ 000}{(r + 1)^2};$$

$$P_{\text{вн}} = I^2 r_0 = \frac{E^2 r_0}{(r + r_0)^2} = \frac{10\ 000}{(r + 1)^2};$$

$$P_{\text{заг}} = EI = I^2(r + r_0) = \frac{E^2}{r + r_0} = \frac{10\ 000}{r + 1};$$

$$\eta = \frac{P_{\text{зовн}}}{P_{\text{заг}}} = \frac{r}{r + r_0} = \frac{r}{r + 1}.$$

Визначимо r, при якому $P_{\text{зовн}}$ буде максимальне. Для цього знайдемо похідну $P_{\text{зовн}}$ по r і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dP_{\text{зовн}}}{dr} = E\ \frac{(r + r_0)^2 - 2(r + r_0)r}{(r + r_0)^2} = 0.$$

Взявши другу похідну, зможемо переконатись, що вона від'ємна. Це відповідає умові максимума.

Звідси знайдемо, що $r = r_0$ тобто при зовнішньому опорі, рівному внутрішньому опору, потужність, яка надходить у завнішне коло, максимальна. При цьому рівняння для η. к.к.д. рівне 0,5.

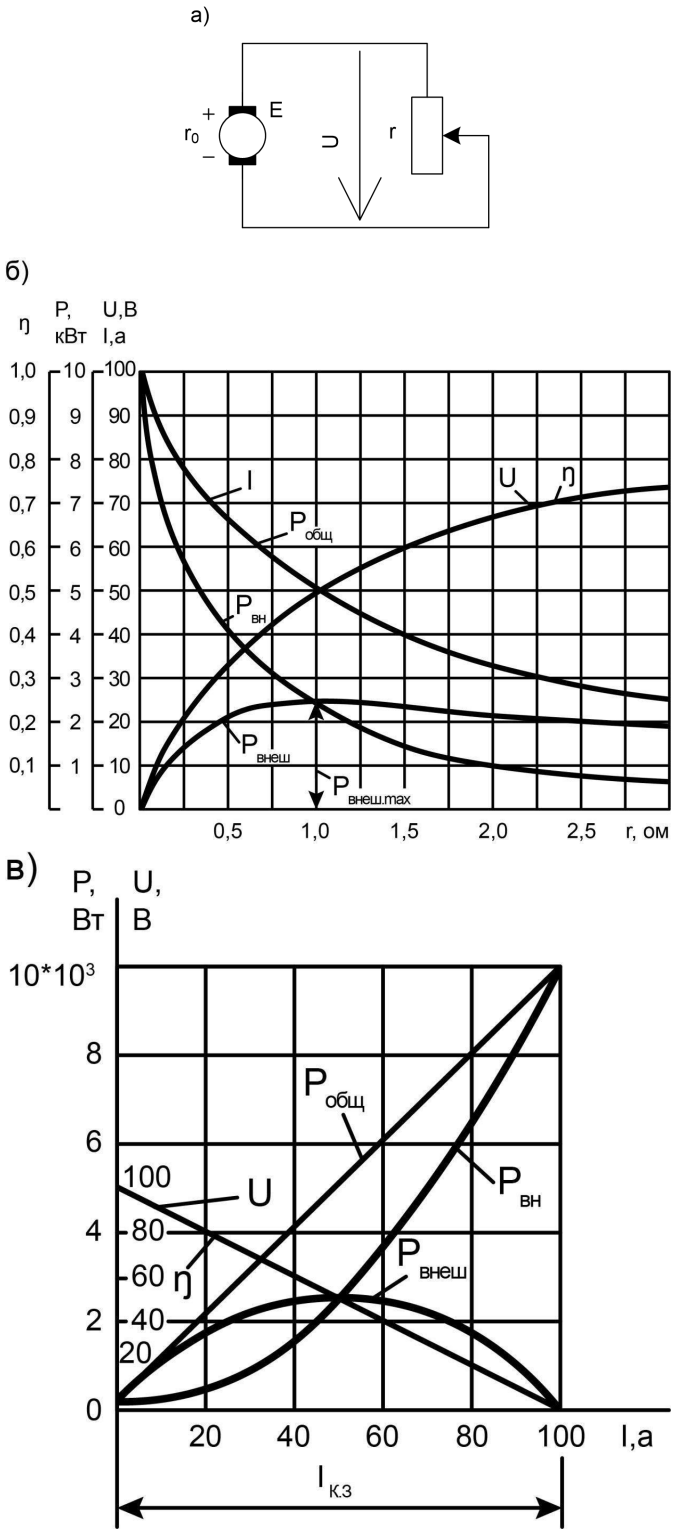

Рис. 3.4

Величина максимальної потужності, яка надходить в зовнішнє коло при

$r = r_0$,

$$P_{\text{зовн max}} = \frac{E^2}{4r_0} = 2500 \text{ вт.}$$

По написаним вище рівняння на рис. 3.4, б побудовані криві.

Шукані рівняння залежностей в функції струму I:

$$U = E - Ir_0;\ P_{\text{зовн}} = EI - I^2 r_0;\ P_{\text{вн}} = I^2 r_0;$$
$$P_{\text{зовн}} = EI;\ \eta = 1 - \frac{Ir_0}{E}.$$

По цим рівнянням на рис. 3.4, в побудовані криві.

3.2.2 В нерозгалудженому колі рис. 3.5. е.р.с. $E_1 = 120$ в, $E_2 = 40$ в, а опір $r_1 = 12$ Ом, $r_2 = 8$ Ом. Визначити напругу між точками a та b.

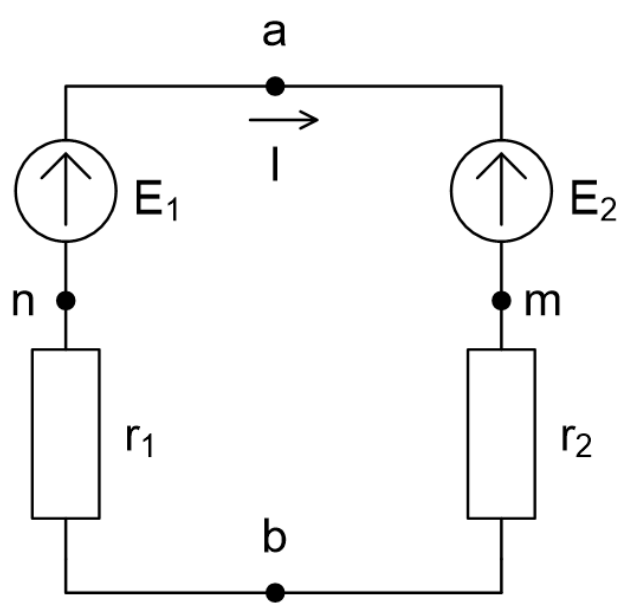

Рис. 3.5

Розв'язання. Вибравши додатній напрям струму за годинниковою стрілкою, на основі закону Ома ((2.30)) струм

$$I = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = \frac{120 - 40}{12 + 8} = 4 \text{ А}$$

Оскільки результат виявився додатнім, то справжнє напрямлення струму співпадає з обраним. Напруга між точками a та b можна знайти за законом Ома (2.29), яка була застосована на проміжку amb:

$$I = \frac{U_{ab} - E_2}{r_2},$$

звідки

$$U_{ab} = E_2 + r_2 I = 40 + 4 \cdot 8 = 72 \text{ в}.$$

Такий результат можна отримати, якщо застосувати ту ж формулу до проміжку bna:

$$I = \frac{U_{ab} + E_1}{r_1}, \text{ або } U_{ba} = r_1 I - E_1 = 4 \cdot 12 - 120 = -72 \text{ в}, \text{ а отже, } U_{ab} = 72 \text{ в}.$$

3.2.3 Побудувати графіки зміни потенціалів вздовж кола, зображеного на рис. 3.6, а, при замкненому й розімкненому ключі, вважаючи, що точка a заземлена ($\varphi_a = 0$). В схемі знайти точку, рівну потенціалу точки a. Визначити, потенціал якої точки, треба узятим рівним нулю, щоб потенціали решти були додатніми (при замкненому ключі). Е.р.с. рівні: $E_1 = 25$ в, $E_2 = 5$ в, $E_3 = 20$ в, $E_4 = 35$ в. Зовнішній опір: $r_1 = 8$ Ом, $r_2 = 24$ Ом, $r_3 = 40$ Ом та $r_4 = 4$ Ом. Внутнішній опір джерел електричної енергії: $r_{10} = 2$ Ом, $r_{20} = 6$ Ом, $r_{30} = 2$ Ом, $r_{40} = 4$ Ом.

Розв'язання. *1. Ключ замкнений.* Узявши додатнє напрямлення струму за годинниковою стрілкою, за законом Ома (2.30) знайдемо

$$I = \frac{E_1 + E_2 - E_3 + E_4}{r_1 + r_{10} + r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30} + r_4 + r_{40}} = \frac{45}{90} = 0{,}5 \text{ А}.$$

Користуючись формулами (2.27) та (2.29), розрахуємо потенціали всіх точок, обходячи контур струму за годинниковою стрілкою:

$$\varphi_a = 0;$$

$$\varphi_b = \varphi_a - r_1 I = -0{,}5 \cdot 8 = -4 \text{ в};$$

$$\varphi_c = \varphi_b + E_1 - r_{10} I = -4 + 25 - 0{,}5 \cdot 2 = 20 \text{ в};$$

$$\varphi_d = \varphi_c - r_2 I = 20 - 0{,}5 \cdot 24 = 8 \text{ в};$$

$$\varphi_f = \varphi_d + E_2 - r_{20} I = 8 + 5 - 0{,}5 \cdot 6 = 10 \text{ в};$$

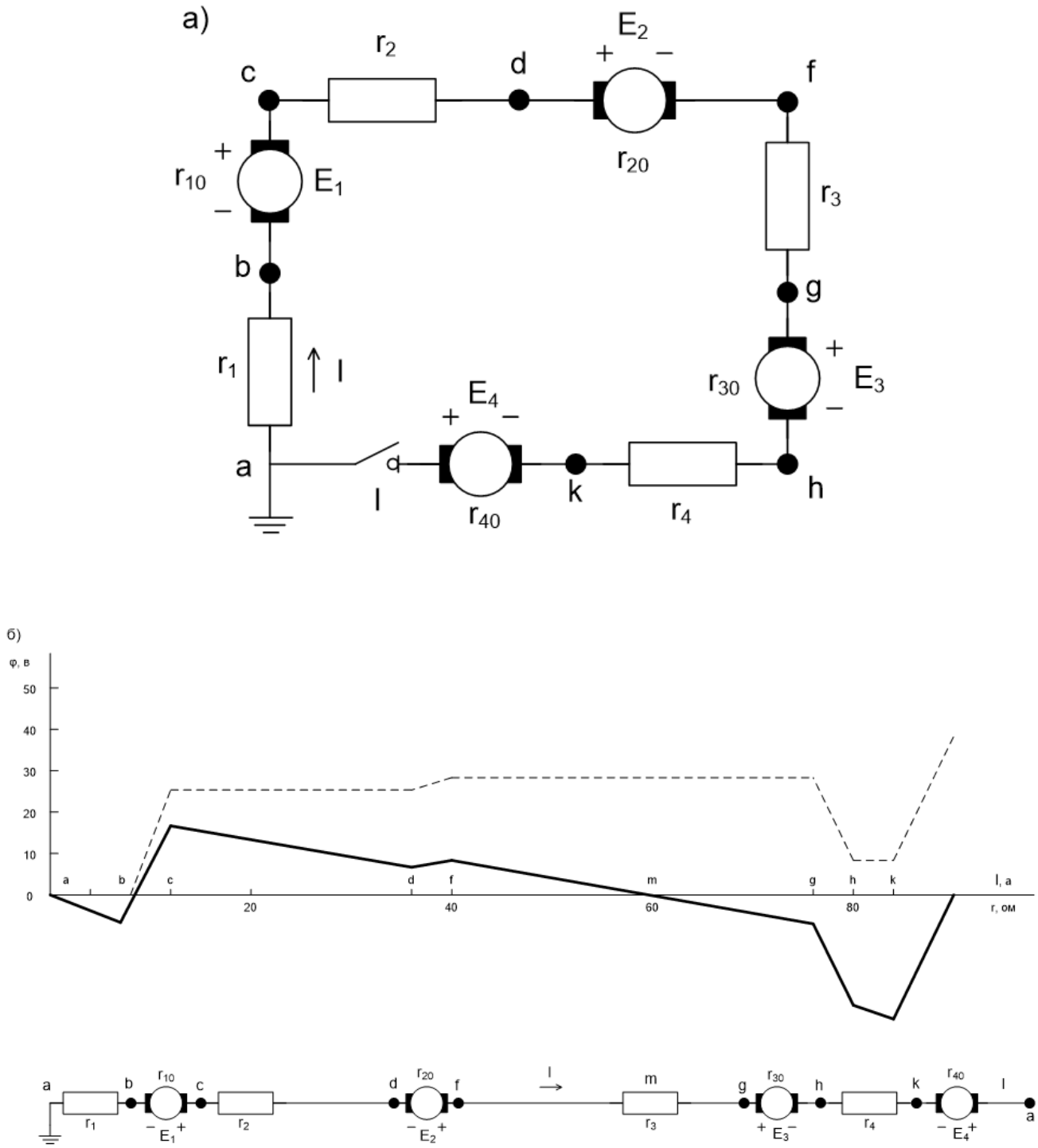

Рис. 3.6

$$\varphi_g = \varphi_f - r_3 I = 10 - 0{,}5 \cdot 40 = -10 \text{ в};$$

$$\varphi_h = \varphi_g - E_3 - r_{30} I = -10 - 20 - 0{,}5 \cdot 2 = 31 \text{ в};$$

$$\varphi_k = \varphi_h - r_4 I = -31 - 0{,}5 \cdot 4 = -33 \text{ в};$$
$$\varphi_a = \varphi_k + E_4 - r_4 I = -33 + 35 - 0{,}5 \cdot 4 = 0;$$

На рис. 3.6,б зображено потенційний графік. По осі абсцис відкладено величини опорів окремих ділянок кола, а по осі ординат - значення потенціалів в окремих точках кола.

Знайдемо точку, рівну потенціалу точки a. З графіку видно, що шукана точка m знаходиться на ділянці опорів fg, оскільки в цій точца пряма падінь потенціалів перетинає вісь абсцис, потенціал якої ріний $\varphi_m = 0$. Позначивши ділянку опору між точками f та m через r_{fm} і застосовуючи до ділянки $abcdfm$ формулу закона Ома (2.29), і враховуючи, що $\varphi_a = \varphi_m$, знайдемо

$$I = \frac{\varphi_a - \varphi_m + E_1 + E_2}{r_1 + r_{10} + r_2 + r_{20} + rfm}, \text{або } 0{,}5 = \frac{30}{40 + r_{fm}},$$

звідки r_{fm} Ом, тобто точка m знаходиться на середині опору r_3.

Для знахоження точки, потенціал якої треба прийняти рівний нулю при умові, що потенціали решти точок буде додатніми, треба звернутися до потенційного графіка, з якого видно, що такою точкою є точка k.

2. Ключ розімкнений. Струму в колі немає, тому точки a та b з рівними потенціалами, тобто $\varphi_a = \varphi_b = 0$. Потенціали точки c перевищує потенціал точки b на величину е.р.с. E_1 $\varphi_c = E_1 = 25$ в; розмірковуючи аналогічно, знайдемо:

$$\varphi_d = \varphi_c = 25 \text{ в}, \ \varphi_f = \varphi_d + E_2 = 30 \text{ в}, \ \varphi_g = \varphi_f = 30 \text{ в},$$

$$\varphi_h = \varphi_g - E_3 = 10 \text{ в}, \ \varphi_k = \varphi_h = 10 \text{ в}, \ \varphi_l = \varphi_k + E_4 = 10 + 35 = 45 \text{ в}.$$

Використовуючи отримані результати, рис. 3.6,б побудований графік змін потенціалів при розімкненому ключі.

3.2.4 Визначити струми у гілках кола рис. 3.7,а та показання вольтметра, включеного між точками c та d, вважаючи, що його опір в багато разів перевищує опір кожного з елементів кола.

Чому рівне показання амперметра, включеного між точками c та d, опір якого вважати рівним нулю? Опір елементів кола : $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = r_3 = r_5 =$ 25 Ом та $r_4 = 50$ Ом, а прикладена до нього напруга $U = 120$ в.

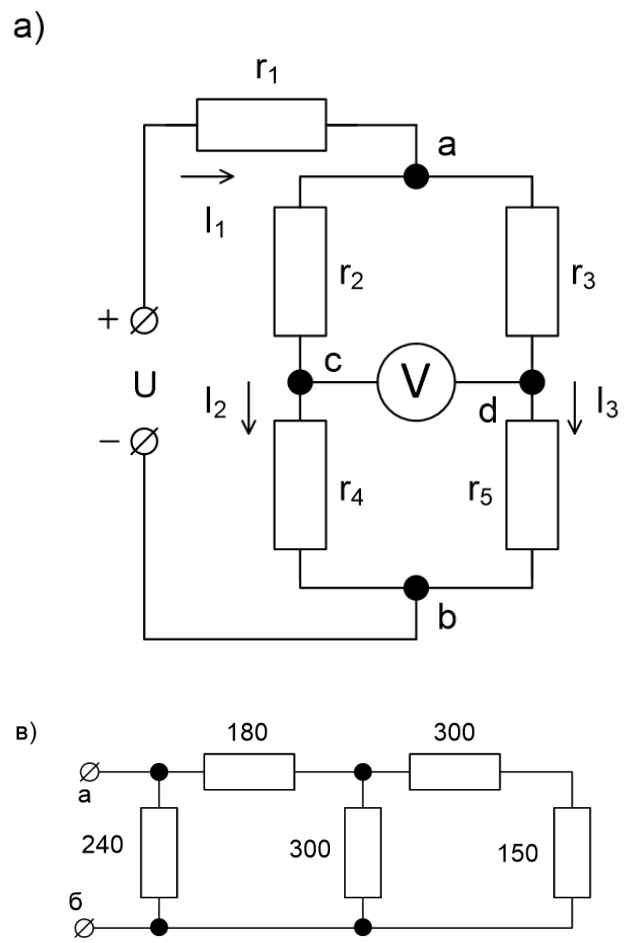

Рис. 3.7

Розв'язання. Розрахунок показань вольтметра. З умови витікає, що його включення не впливає на разподіл струмів в колі. Для розрахунку струму спочатку визначаємо еквівалентний опір на всьому колі рис. 3.7,а:

$$r = r_1 + \frac{(r_2 + r_4)(r_3 + r_5)}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 10 + \frac{75 \cdot 50}{125} = 40 \text{ Ом}.$$

В нерозгалуженій частині кола протікає струм

$$I_1 = \frac{U}{r} = \frac{120}{40} = 3 \text{ А}.$$

Струми, які течуть через опір $r_2 + r_4$ та $r_3 + r_5$, можна знайти різними

способами.

1. В паралельних гілках струми розподіляється обернено пропорційно їх опору:

$$I_2 = I_1 \frac{r_3 + r_5}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 3\frac{50}{125} = 1{,}2 \text{ А};$$

$$I_3 = I_1 \frac{r_2 + r_4}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 3\frac{75}{125} = 1{,}8 \text{ А}.$$

2. Знайдемо напругу на затискачах паралельних гілок:

$$U_{ab} = I_1 \frac{(r_2 + r_4)(r_3 + r_5)}{r_2 + r_4 + r_3 + r_5} = 3\frac{75 \cdot 50}{125} = 90 \text{ в}.$$

Струми в гілках з опором $r_2 + r_4$ та $r_3 + r_5$ рівні:

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{r_2 + r_4} = \frac{90}{75} = 1{,}2 \text{ А}; \; I_3 = \frac{U_{ab}}{r_3 + r_5} = \frac{90}{50} = 1{,}8 \text{ А}.$$

Напруга на затискачах паралельних гілок можна знайти, як різницю між доданими напругами і падінням напруг на опорах $r_1 : U_{ab} - r_1 I_1$.

Знайдемо показання вольтметра, рівне напрузі між точками c та d:

$$U_V = U_{cd} = -I_2 r_2 + I_3 r_3 = -1{,}2 \cdot 25 + 1{,}8 \cdot 25 = 15 \text{ в}.$$

Нарешті, розрахуємо струм, який проходить через амперметр; він рівний струму короткого замикання I'_{cd} рис. 3.7,б. Для його знаходження знайдемо струми:

$$I'_1 = \frac{U}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5}} = \frac{144}{47} \text{ А};$$

$$I'_2 = I'_1 \frac{r_3}{r_2 + r_3} = \frac{72}{47} \text{ А}; \; I'_4 = I'_1 \frac{r_5}{r_4 + r_5} = \frac{24}{47} = 0{,}51 \text{ А}.$$

3.2.5 В схемі рис.3.8 знайти опір r_x, якщо $I_1 = 2{,}6$ А, $I_3 = 0{,}6$ А, $r_2 = 1{,}4$ Ом, $r_3 = 3$ Ом, $r_4 = 2{,}5$ Ом. Знайти е.р.с.батареї E, якщо її внутнішній опір $r_0 = 0{,}1$ Ом.

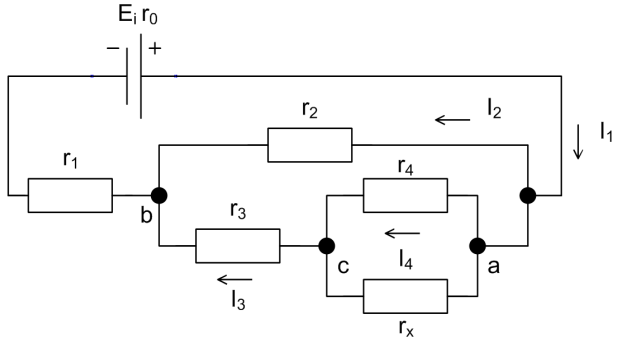

Рис. 3.8

Розв'язання. На основі першого закона Кірхгофа

$$I_2 = I_1 = I_3 = 2{,}6 - 0{,}6 = 2 \text{ А}.$$

За законом Ома,застосованого до ділянки кола в якому є е.р.с.E і опір r_1 та r_0, знайдемо шукану е.р.с.:

$$E = U_{ab} + (r_1 + r_0)I_1 = 2{,}8 + 0{,}6 \cdot 2{,}6 = 4{,}36 \text{ в}.$$

Тепер знайдемо напругу на паралельних гілках з опором r_4 та r_x і точки в них:

$$U_{ac} = U_{ab} - r_3 I_3 = 2{,}8 - 0{,}6 \cdot 3 = 1 \text{ в},$$

$$I_4 = \frac{U_{ac}}{r_4} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \text{ А},$$

$$I_x = I_3 - I_4 = 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2 \text{ А}.$$

Шуканий опір

$$r_x = \frac{U_{ac}}{I_x} = \frac{1}{0{,}2} = 5 \text{ Ом}.$$

3.2.6 Для схеми рис.3.9, користуючись законами Кірхгофа, знайти струми і перевірити баланс потужностей. Якщо е.р.с. генераторіів напруги: $E_1 = 15$ в, $E_2 = 70$ в, $E_3 = 5$ в, їх внутрішній опір: $r_{10} = r_{20} = 1$ Ом, $r_{30} = 2$ Ом, опір елементів в колі: $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 4$ Ом, $r_3 = 8$ Ом, $r_4 = 2{,}5$ Ом, $r_5 = 15$ Ом.

Розв'язання. Всього в схемі п'ять гілок ($N_\text{г} = 5 : bfa$, adc, ba, bc, ca), число вузлів $N_\text{в} = 3$ (a, b та c), генераторів струму немає ($N_\text{с} = 0$), число

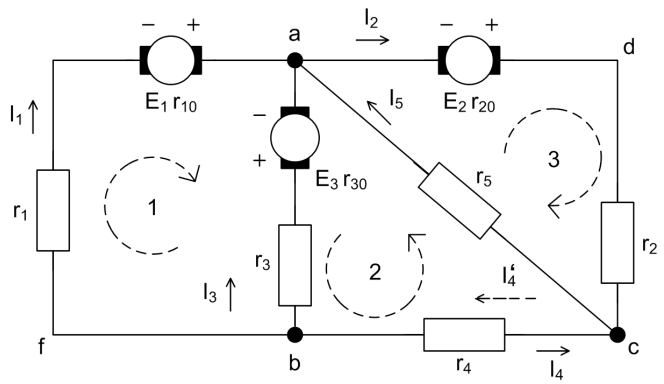

Рис. 3.9

невідомих струмів рівне $N_г - N_с = 5$. Число незалежних рівнянь, зіставлених за першим законом Кірхгофа, рівне числу вузлів мінус одиниця, тобто двум ($N_в - 1 = 3 - 1 = 2$). Число рівнянь, зіставлених за другим законом Кірхгова, рівне числу невідомих струмів в п'яти гілках схеми.

Виберемо додатній напрям струмів і позначимо їх стрілками. Виберемо і позначимо стрілками направлення обходу трьох незалежних контурів : I, II, та III. Зіставимо систему рівнянь Кірхгофа:

для вузла a

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0; \tag{3.1}$$

для вузла b

$$-I_1 - I_3 - I_4 = 0; \tag{3.2}$$

для контура I

$$E_1 + E_3 = (r_1 + r_{10})I_1 - (r_3 + r_{30})I_3; \tag{3.3}$$

для контура II

$$E_3 = -(r_3 + r_{30})I_3 + r_4 I_4 + r_5 I_5; \tag{3.4}$$

для контура III

$$E_2 = (r_2 + r_{20})I_2 + r_5 I_5. \tag{3.5}$$

Рівняння (3.1)—(3.5) після підстановки в них числових значень будуть мати наступний вигляд:

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_5 = 0;\ I_1 + I_3 + I_4 = 0;$$

$$6I_1 - 10I_3 = 20;\ -10I_3 + 2{,}5I_4 + 15I_5 = 5;\ 5I_2 + 15I_5 = 70.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримаємо :

$$I_1 = 5\ A;\ I_2 = 8\ A;\ I_3 = 1\ A;\ I_4 = -6\ A;\ I_5 = 2\ A.$$

Від'ємний знак для струма I_4 означає, що істинний напрям струму в опорі r_4 протилежний прийнятому. Істинний напрям струму в опорі r_4 позначений I_4' і показаний на схемі штрихованою стрілкою.

При перевірці баланса потужностей треба мати на увазі, що в тих гілках кола, де істинний напрям струму співпадає з напрямом е.р.с., відповідна е.р.с. є джерелом енергії, а в тих ділянках, де напрям е.р.с. і струму протилежні, е.р.с. — споживач енергії. Всі опори, як зовнішні, так і генератори енергії, незалежно від струму, що в них протікає будуть споживачами енергії.

Баланс потужностей для цього кола

$$E_1I_1 + E_2I_2 - E_3I_3 = I_1^2(r_1 + r_{10}) + I_2^2(r_2 + r_{20}) + I_3^2(r_3 + r_{30}) + I_4^2r_4 + I_5^2r_5,$$

або

$$15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2{,}5 + 2^2 \cdot 15;$$

отримана тотожність $630 = 630$.

3.2.7 Напруги виміряні електростатичним вольтметром між вузловими точками схеми і землею рівні $U_{10} = -15$ в, $U_{20} = 52$ в, $U_{30} = 64$ в (рис.3.10). Визначити струми в гілках і дротах за $E_1 = 80$ в, $E_3 = 70$ в, $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 10$ Ом, $r_3 = 12$ Ом.

Розв'язання. Знайдемо напругу між точками 1 і 2, 2 і 3, 3 і 1:

$$U_{10} - U_{20} = U_{12} = -15 - 52 = -67 \text{ в};$$

$$U_{20} - U_{30} = U_{23} = 52 - 64 = -12 \text{ в};$$

$$U_{30} - U_{10} = U_{31} = 64 - (-15) = 79 \text{ в}.$$

Довільно оберемо додатній напрям струмів гілок та покажемо їх стрілками.

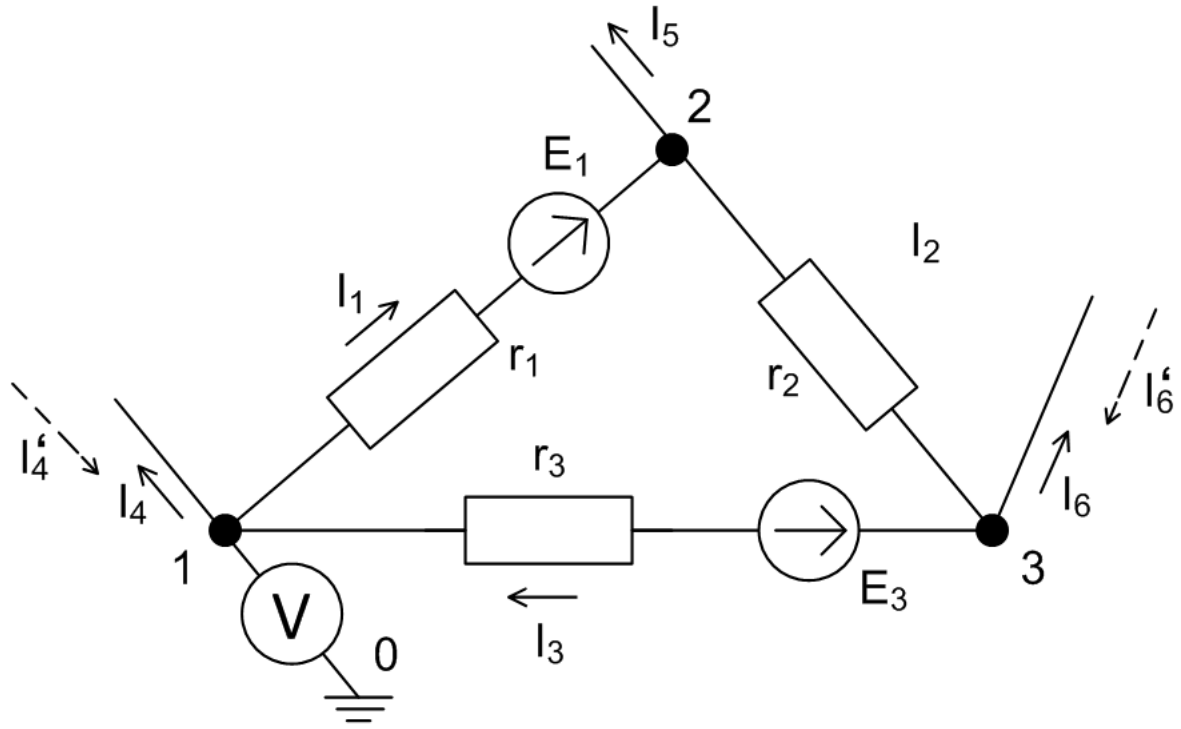

Рис. 3.10

Застосовуючи до гілок закон Ома, визначимо:

$$I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{r_1} = \frac{-67 + 80}{5} = 2{,}6 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{U_{32}}{r_2} = \frac{12}{10} = 1{,}2 \text{ А},$$

$$I_3 = \frac{U_{31} - E_3}{r_3} = \frac{79 - 70}{12} = 0{,}75 \text{ А}.$$

Струми у відгалудженнях від вузлових точках знаходимо по першому зокону Кірхгофа:

$$I_4 = I_3 - I_1 = -1{,}85 \text{ А}; I_5 = I_1 + I_2 = 3{,}8 \text{ А};$$

$$I_6 = -I_2 - I_3 = -1{,}95 \text{ А}.$$

Струми I_4 та I_6 виявились зі знаком мінус. Це каже про те, що через вузли 1 та 3 в схему протікає "істинні"додатні струми I_4' та I_6', позначені на схемі штрихованими стрілками.

3.2.8 До джерела струму $J = 0{,}1$ А, підключені опори рис.3.11: $r_1 = 12$ Ом, $r_2 = 10$ Ом, $r_3 = 16$ Ом, $r_4 = 40$ Ом, $r_5 = 60$ Ом

Знайти напругу U_{ab} джерела струму і всі струми. Перевірити баланс потужностей.

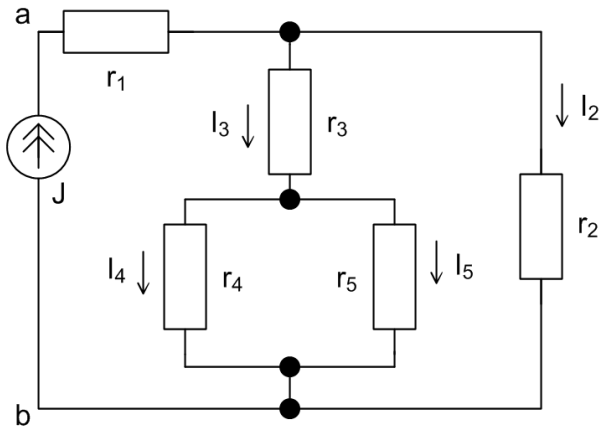

Рис. 3.11

Розв'язання. Спочатку знайдемо опір схеми між затискачами a та b:

$$r_{ab} = r_1 + \frac{r_2(r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4+r_5})}{r_2 + r_3 + \frac{r_4 r_5}{r_4+r_5}} = 12 + \frac{10(16 + \frac{40\cdot 60}{100})}{10 + 16 + \frac{40\cdot 60}{100}} = 20 \text{ Ом}.$$

Напруга джерела струму

$$U_{ab} = r_{ab} J = 20 \cdot 0{,}1 = 2 \text{ в}.$$

За законом Ома знаходимо струм, який проходить через r_2:

$$I_? = \frac{U_{ab} - J r_1}{r_2} = \frac{2 - 0{,}1 \cdot 12}{10} = 0{,}08 \text{ А}.$$

Струм I_3, що проходить через r_3, знайдемо з першого закона Кірхгофа:

$$I_3 = J - I_2 = 0{,}1 - 0{,}08 = 0{,}02 \text{ А}.$$

Цей струм розподіляється обернено пропорційно опорам r_4 та r_5:

$$I_4 = I_3 \frac{r_5}{r_4 + r_5} = 0{,}02 \frac{60}{100} = 0{,}012 \text{ А};$$

$$I_5 = I_3 - I_4 = 0{,}008 \text{ А}.$$

Перевірка балансу потужностей. Потужність отримана з джерела струму,

$$P_{\text{с}} = U_{ab} J = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 \text{ Вт}.$$

Потужність,яка витрачається в навантажувальних опорах,

$$P_{\text{н}} = J^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I_3^2 r_3 + I_4^2 r_4 + I_5^2 r_5 =$$

$$= 0{,}1^2 \cdot 12 + 0{,}08^2 \cdot 10 + 0{,}02^2 \cdot 16 + 0{,}012^2 \cdot 40 + 0{,}008^2 \cdot 60 = 0{,}2 \text{ Вт},$$

тобто отримана тотожність

$$P_{\text{с}} = P_{\text{н}} = 0{,}2 \text{ Вт}.$$

3.2.9 Коло рис.3.12 містить генератор струму, внутрішня провідність якого $g_{\text{г}} = 5 \cdot 10^{-5}$ Сім і струм $J = 80$ мА, джерело напруги е.р.с. $E_1 = 230$ в; опір $r_1 = 1$ кОм, $r_2 = 2$ кОм. Знайти всі струми. Перевірити баланс потужностей.

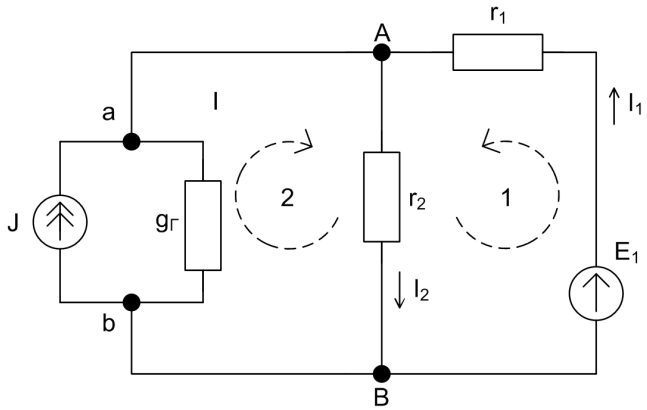

Рис. 3.12

Розв'язання. Оберемо додатні напрями струмів, як це показано на рис.3.12, і складемо рівняння за законом Кірхгофа. Коло має чотири гілки $N_{\text{г}} = 4$, два вузла A та B ($N_{\text{в}} = 2$), один генератор струму ($N_{\text{с}} = 1$). Число рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, рівне ($N_{\text{в}} - 1 = 1$), а за

другим законом Кірхгофа

$$K = N_{\text{г}} - N_{\text{в}} + 1 - N_{\text{с}} = 4 - 2 + 1 - 1 = 2.$$

Оберемо два незалежних контура I та II, які не містять джерел струму.

Рівняння для вузла А

$$J - I - I_2 + I_1 = 0;$$

для контура I

$$r_1 I_1 + r_2 I_2 = E_1;$$

для контура II

$$r_2 I_2 - \frac{1}{\text{g}_{\text{г}}} I = 0.$$

Підставляючи цифрові значеня в ці рівняння і обчислюючи їх, отримаємо: $I_1 = 30$ мА, $I_2 = 100$ мА, $I = 10$ мА.

Для перевірки баланса потужностей спочатку знайдемо напругу на джерелі струму:

$$U_{ab} = \frac{1}{\text{g}_{\text{г}}} I = \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} 10 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ в}.$$

Потужність, здійснена джерелом струму і генератором напруги,

$$P_{\text{д}} = U_{ab} J + E_1 I_1 = 200 \cdot 80 \cdot 10^{-3} + 230 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 22{,}9 \text{ Вт}$$

Потужність, яка витрачається в опорах

$$P = I_1^2 r_1 + I_2^2 r_2 + I^2 \frac{1}{\text{g}_{\text{г}}} = 0{,}03^2 \cdot 10^3 + 0{,}1^2 \cdot 2 \cdot 10^3 + 0{,}01^2 \frac{1}{5 \cdot 10^{-5}} = 22{,}9 \text{ Вт},$$

3.3 Методи контурних струмів і вузлових потенціалів

3.3.1 Методом контурних струмів знайти струми в колах, схема якої зображена на рис.3.13 Дано: $E_1 = 100$ в, $E_2 = 30$ в, $E_3 = 10$ в, $E_4 = 6$ в, $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 10$ Ом, $r_4 = 6$ Ом, $r_5 = 5$ Ом, $r_6 = 15$ Ом, $r_{40} = 1$ Ом.

Розв'язання. Виберемо напрям контурних струмів, які позначимо $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$.

Складемо систему рівнянь для контурів:

$$E_1 - E_2 - E_3 = (r_1 + r_2)\mathcal{J}_1 - r_2 \mathcal{J}_2;$$

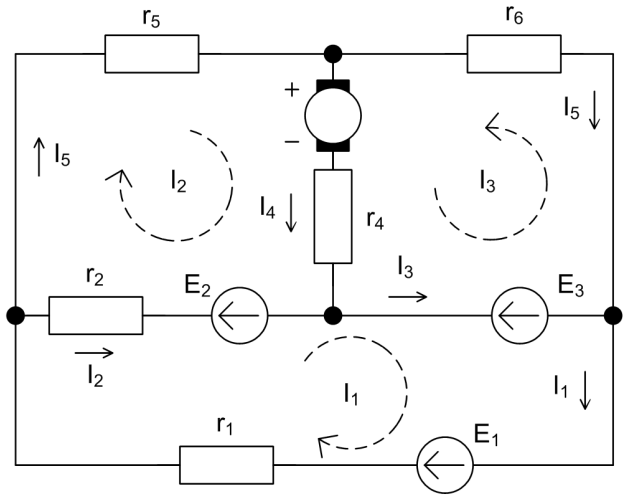

Рис. 3.13

$$E_2 - E_4 = (r_2 + r_5 + r_{40} + r_4)\mathcal{J}_2 + (r_{40} + r_4)\mathcal{J}_3 - r_2\mathcal{J}_1;$$
$$-E_3 - E_4 = (r_6 + r_{40} + r_4)\mathcal{J}_3 + (r_{40} + r_4)\mathcal{J}_2.$$

Після підстановки числових значень маємо:

$$60 = 20\mathcal{J}_1 - 10\mathcal{J}_2;$$

$$24 = -10\mathcal{J}_1 + 22\mathcal{J}_2 + 7\mathcal{J}_3;$$
$$-16 = 7\mathcal{J}_2 + 22\mathcal{J}_3.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо контурні струми:

$$\mathcal{J}_1 = 5 \text{ А}; \mathcal{J}_2 = 4 \text{ А}; \mathcal{J}_3 = -2 \text{ А},$$

і потім знайдемо істинні струми у всіх гілках.

У гілці, де діє е.р.с. E_1, істинний струм I_1 має напрям контурного струму $\mathcal{J}_1$ і дорівнює $I_1 = \mathcal{J}_1 = 5$ А.

У гілці з опором r_5 істинний струм I_5 має напрям контурного струму $\mathcal{J}_2$ і рівний $I_5 = \mathcal{J}_2 = 4$ А.

У гілці з опором r_5 істинний струм I_6 має напрям, протилежний контурному струму $\mathcal{J}_3$ і рівний $I_6 = -\mathcal{J}_3 = 2$ А.

У гілці з опором r_2 істинний струм I_2 отримаємо, наклавши контурні стру-

ми $\mathcal{J}_1$ та $\mathcal{J}_2$ і має напрям великого контурного струму $\mathcal{J}_1$:

$$I_2 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 = 5 - 4 = 1 \text{ А}.$$

У гілці, де діє е.р.с. E_3, істинний струм I_3 отримаємо, наклавши контурні струми $\mathcal{J}_1$ та $\mathcal{J}_3$ і має напрям контурного струму $\mathcal{J}_1$:

$$I_3 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3 = 5 + (-2) = 3 \text{ А}.$$

Покажемо, як цю задачу можна розв'язати за допомогаю визначника. Для цього рівняння контурних струмів слід записати в формі:

$$r_{11}\mathcal{J}_1 + r_{12}\mathcal{J}_2 + r_{13}\mathcal{J}_3 = E_{11};$$

$$r_{21}\mathcal{J}_1 + r_{22}\mathcal{J}_2 + r_{23}\mathcal{J}_3 = E_{22};$$

$$r_{31}\mathcal{J}_1 + r_{32}\mathcal{J}_2 + r_{33}\mathcal{J}_3 = E_{33};$$

де

$$r_{11} = r_1 + r_2 = 20 \text{ Ом}, \; r_{12} = r_{21} = -r_2 = -10 \text{ Ом};$$

$$r_{13} = r_{31} = 0, \; r_{22} = r_2 + r_5 + r_{40} + r_4 = 22 \text{ Ом};$$

$$r_{23} = r_{32} = r_{40} + r_4 = 7 \text{ Ом}, r_{33} = r_6 + r_{40} + r_4 = 22 \text{ Ом};$$

$$E_{11} = E_1 - E_2 - E_3 = 60 \text{ в}; \; E_{22} = E_2 - E_4 = 24 \text{ в}; \; E_{33} = -E_3 - E_4 = -16 \text{ в}.$$

Складемо визначник Δ і підрахуємо його значення:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 22 & 7 \\ 0 & 7 & 22 \end{pmatrix} =$$

$$20 \; cdot 22 \cdot 22 + (-10) \cdot 7 \cdot 0 + 0 \cdot (-10) \cdot 7 - 0 \cdot 22 \cdot 0 - 20 \cdot 7 \; dot 7 - (-10)(-10) 22 =$$

$$= 9680 - 980 - 2200 = 6500.$$

Підрахуємо значення алгебраїчних доповнень визначника, розрахувавши його мінори і помноживши кожен з них на $(-1)^{k+1}$, де k— номер викреслювального рядка, а l — номер викреслювального стовпця; Δ_1 — це алгебраїчне доповнення, яке отримується з основного визначника Δ шляхом

викреслювання першого рядка і першого стовпця, помножене на $(-1)^{1+1}$:

$$\mathbf{\Delta_{11}} = \begin{pmatrix} 22 & 7 \\ 7 & 22 \end{pmatrix} (-1)^2 = 22 \cdot 22 - 7 \cdot 7 = 435;$$

Δ_{12} — алгебраїчне доповнення, отримане з основного визначника Δ шляхом викреслювання першого рядка і другого стовпця, помножене на $(-1)^{1+2}$:

$$\mathbf{\Delta_{12}} = \begin{pmatrix} -10 & 7 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} (-1)^3 = -(-10 \cdot 22 - 7 \cdot 0) = 220 = \Delta_{21};$$

Аналогічно знайдемо:

$$\Delta_{13} = \Delta_{31} = -70;\ \Delta_{22} = 440;\ \Delta_{23} = \Delta_{32} = -140;\ \Delta_{33} = 340.$$

Шукані контурні струми:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{1}} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} E_{11} & E_{22} & E_{33} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = E_{11}\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{12}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{13}}{\Delta} =$$

$$= 60\frac{435}{6500} + 24\frac{220}{6500} - 16\frac{(-70)}{6500} = 5 \text{ А};$$

$$\mathcal{J}_{\mathbf{2}} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ E_{11} & E_{22} & E_{33} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = E_{11}\frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{22}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{23}}{\Delta} = 4 \text{ А};$$

$$\mathcal{J}_{\mathbf{3}} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ E_{11} & E_{22} & E_{33} \end{pmatrix} = E_{11}\frac{\Delta_{31}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{32}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{33}}{\Delta} = -2 \text{ А};$$

Таким чином, отримали ті ж результати, що й раніше.

3.3.2 Коло рис.3.14 має джерело струму $J = 50$ мА, джерело напруги з е.р.с. $E = 60$ в і опори $r_1 = 5$, кОм $r_2 = 4$, кОм $r_3 = 16$, кОм $r_4 = 2$, кОм $r_5 = 8$ кОм.

Знайти всі струми методом контурних струмів. Перевірили баланс потужностей.

Розв'язання. Схема має шість гілок ($N_г = 6$), чотири вузла ($N_в = 4$), один генератор струму ($N_с = 1$). Число незалежних рівнянь, складених

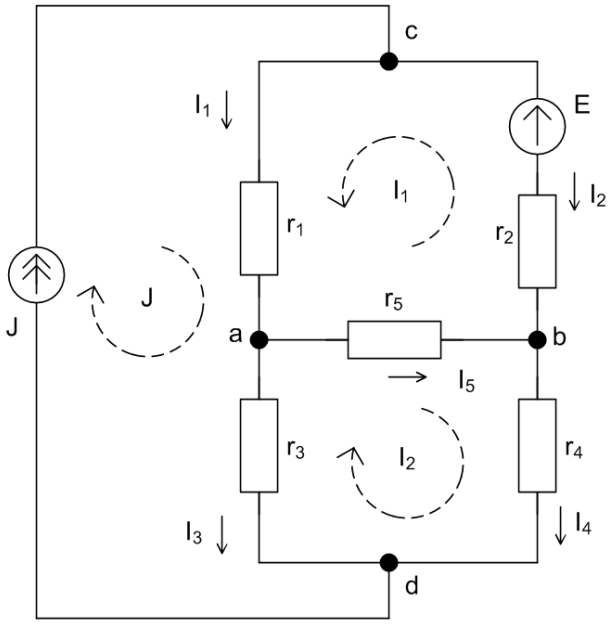

Рис. 3.14

за методом контурних струмів, рівне двум $K = 6 - 4 + 1 - 1 = 2$. Задамо напрямок контурних струмів $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, як показано на рис.3.14. Там же наносимо і відомий контурний струм джерела струму J. Складемо систему рівнянь для першого і другого контурів:

$$(r_1 + r_2 + r_5)\mathcal{J}_1 + r_5\mathcal{J}_2 + r_1\mathcal{J} = E;$$

$$r_5\mathcal{J}_1 + (r_3 + r_4 + r_5)\mathcal{J}_2 - r_3\mathcal{J} = 0.$$

Підставивши цифрові значення і вирішуючи ці рівняння, знайдемо контурні струми:

$$\mathcal{J}_1 = -30 \text{ мА і } \mathcal{J}_2 = 40 \text{ мА}.$$

Шукані струми:

$$I_1 = \mathcal{J}_1 + J = 20 \text{ мА};\ I_2 = -\mathcal{J}_1 = 30 \text{ мА};\ I_3 = J - \mathcal{J}_2 = 10 \text{ мА};$$

$$I_4 = \mathcal{J}_2 = 40 \text{ мА};\ I_5 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 10 \text{ мА}.$$

Баланс потужностей

$$-EI_2 + U_{cd}J = -EI_2 + (r_1I_1 + r_3I_3)J =$$

$$= I_1^2r_1 + I_2^2r_2 + I_3^2r_3 + I_4^2r_4 + I_5^2r_5.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо тотожність: 11,2 Вт = 11,2 Вт.

3.3.3 Для схеми, рис. 3.15,а, використовуючи метод вузлових потенціалів, визначити всі струми. Дано: $E_1 = 30$ в, $E_2 = 10$ в, $E_3 = 20$ в, $E_4 = 56$ в, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 30$ Ом, $r_3 = 6$ Ом, $r_4 = 8$ Ом, $r_5 = 15$ Ом, $r_6 = 40$ Ом, $r_7 = 10$ Ом.

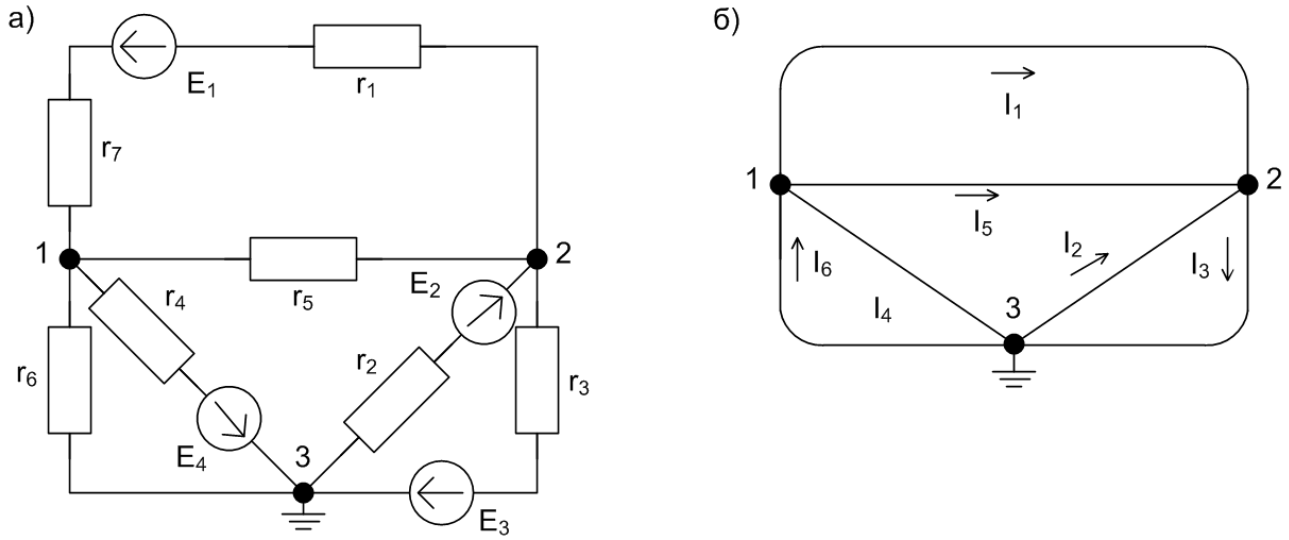

Рис. 3.15

Розв'язання. Візьмемо потенціал точки 3 рівний нулю ($\varphi_3 = 0$). Тоді на основі (1.13) запишемо систему рівнянь для знаходження потенціалів точки 1 та 2:

$$\varphi_1\ \mathrm{g}_{11} - \varphi_2\ \mathrm{g}_{12} = \sum_1 E\ \mathrm{g}; \tag{3.6}$$

$$-\ \varphi_1\ \mathrm{g}_{21} - \varphi_2\ \mathrm{g}_{22} = \sum_2 E\ \mathrm{g}; \tag{3.7}$$

Підрахуємо g_{11} — сума провідностей гілок, приєднаних до вузла 1:

$$g_{11} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} + \frac{1}{40} = 0{,}25 \text{ Сім.}$$

Аналогічно g_{22} — сума провідностей гілок, приєднаних до вузла 2:

$$g_{22} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = 0{,}3 \text{ Сім.}$$

Сума провідностей, які з'єднують перший та другий вузли,

$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{r_1 + r_7} + \frac{1}{r_5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{15} = 0{,}1 \text{ Сім.}$$

Підставляючи числові значення в рівняння (3.6) та (3.7), отримаємо:

$$0{,}25\varphi_1 - 0{,}1\varphi_2 = 30\frac{1}{30} - 56\frac{1}{8} = -6;$$

$$-0{,}1\varphi_1 + 0{,}3\varphi_2 = -30\frac{1}{30} + 10\frac{1}{30} - 200\frac{1}{6} = -34.$$

Розв'язавши два рівняння, знайдемо потенціали точок 1 і 2:

$$\varphi_1 = -80 \text{ в}; \varphi_2 = -140 \text{ в}.$$

Нарешті застосовуючи закон Ома для окремих гілок, знайдемо шукані струми:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_1}{r_1} = \frac{-80 + 140 - 30}{30} = 1 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_2}{r_2} = \frac{140 + 10}{30} = 5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_3}{r_3} = \frac{-140 + 200}{6} = 10 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 - E_4}{r_4} = \frac{80 - 56}{8} = 3 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{r_5} = \frac{-80 + 140}{15} = 4 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{r_6} = \frac{80}{40} = 2 \text{ А};$$

Напрям знайдених струмів вказаний на структурованій схемі рис. 3.15,б кола рис. 3.15,а.

Рекомендуємо читачу розв'язати ту ж задачу, прийнявши за нуль потенціали вузлової точки 1.

3.3.4 Методом вузлових потенціалів знайти струми в усіх гілках схеми, зображеної на рис. 3.16,а. Дано: $E_1 = 20$ в, $E_2 = 30$ в, $E_3 = 2$ в, $E_4 = 1{,}2$ в, $E_5 = 5{,}6$ в, $r_2 = 50$ Ом, $r_3 = 10$ Ом, $r_4 = 20$ Ом, $r_5 = 10$ Ом, $r_6 = 100$ Ом, $r_7 = 50$ Ом, $r_8 = 20$ Ом.

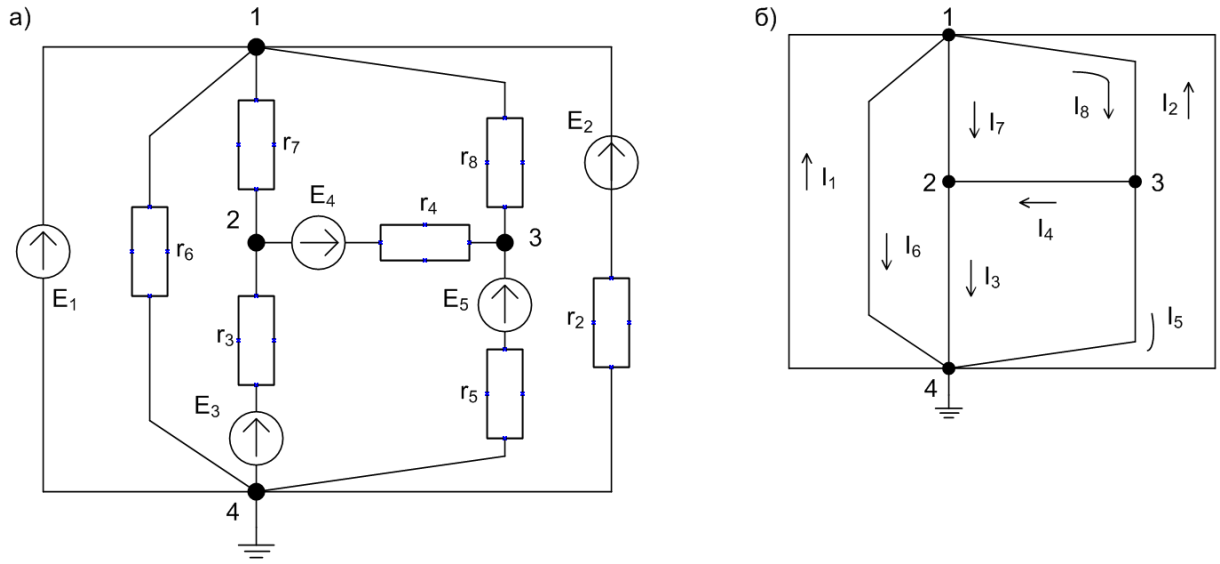

Рис. 3.16

Розв'язання. В колі є гілка з джерелом напруги, в якій немає опору. Доцільно прийняти рівний нулю потенціал одного з вузлових точок, до якого під'єднана ця гілка, наприклад потенціал вузла 4 ($\varphi_4 = 0$). Тоді потенціал точки 1 має значення, рівне E_1, тобто $\varphi_1 = 20$ в. Загальне число рівнянь рівне двум ($N_{\text{в}} = 4, N_{\text{н}} = 1, B = N_{\text{в}} - N_{\text{н}} - 1 = 2$). Таким чином в даній задачі достатньо скласти за методом вузлових потенціалів всього два рівняння для вузлів 2 та 3.

для вузла 2

$$-\varphi_1 \text{ g}_{21} + \varphi_2 \text{ g}_{22} - \varphi_3 \text{ g}_{23} - \varphi_4 \text{ g}_{24} = \sum_2 E \text{ g} = E_3 \frac{1}{r_3} - E_4 \frac{1}{r_4},$$

для вузла 3

$$-\varphi_1\ \mathrm{g}_{31} - \varphi_2\ \mathrm{g}_{32} + \varphi_3\ \mathrm{g}_{33} - \varphi_4\ \mathrm{g}_{34} = \sum_3 E\ \mathrm{g} = E_4\frac{1}{r_4} - E_5\frac{1}{r_5}.$$

Підставляючи в ці рівняння числові значення опорів, е.р.с., а також значення $\varphi_1 = 20$ в, $\varphi_4 = 0$, отримаємо після перегрупувань членів для двох невідомих потенціалів φ_2 та φ_3 систему рівнянь:

$$\varphi_2(\frac{1}{50} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}) - \varphi_3\frac{1}{20} = \frac{2}{10} - \frac{1{,}2}{20} + \frac{20}{50};$$

$$-\varphi_2\frac{1}{20} + \varphi_3(\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}) = \frac{1{,}2}{20} + \frac{5{,}6}{10} + \frac{20}{20},$$

або

$$0{,}17\varphi_2 - 0{,}05\varphi_3 = 0{,}54;\ -0{,}05\varphi_2 + 0{,}2\varphi_3 = 1{,}62.$$

Розв'язуєчи цю систему рівнянь, знайдемо:

$$\varphi_2 = 6 \text{ в};\ \varphi_3 = 9{,}6 \text{ в}.$$

Нарешті, застосовуючи до окремих гілок формули закону Ома, отримаємо значення всіх струмів, які нанесені на структурній схемі рис. 3.16:

$$I_2 = 0{,}2 \text{ А},\ I_3 = 0{,}4 \text{ А},\ I_4 = 0{,}12 \text{ А},\ I_5 = 0{,}4 \text{ А},$$

$$I_6 = 0{,}2 \text{ А},\ I_7 = 0{,}28 \text{ А},\ I_8 = 0{,}52 \text{ А}.$$

Звертаємо особливу увагу на те, що в гілках без опору? струм I_1 не знаходиться за законом Ома і разраховується на основі першого закону Кірхгофа:

$$I_1 = I_3 + I_5 + I_6 - I_2 = 0{,}8 \text{ А}.$$

3.3.5 Знайти струми методом вузлових потенціалів зі схеми рис. 3.17. Дано: $J_1 = 50$ мА, $\mathrm{g}_1 = 10^{-4}$ Сім, $J_2 = 60$ мА, $\mathrm{g}_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Сім, $E_3 = 270$ в, $r_3 = 1$ Ом, $r_4 = 2$ Ом, $r_5 = 7{,}5$ Ом, $r_6 = 3$ Ом.

Розв'язання. Потенціал вузла 4 приймемо рівний нулю ($\varphi_4 = 0$). Складемо систему рівнянь, за методом вузових потенціалів для вузлів 1, 2, 3.

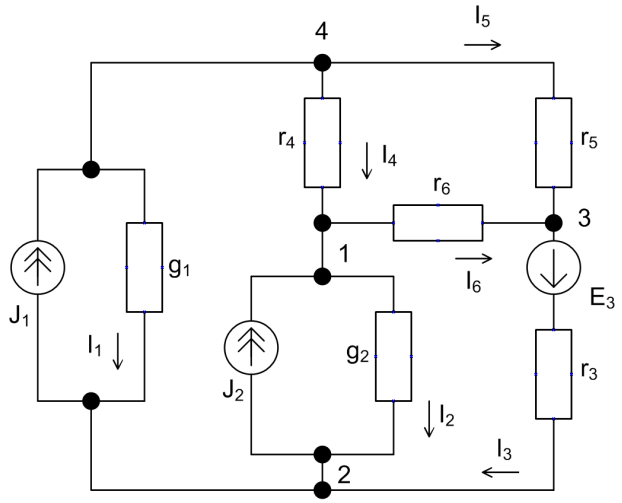

Рис. 3.17

Для вузла 1

$$\varphi_1(g_2 + g_4 + g_6) - \varphi_2 g_2 - \varphi_3 g_6 - \varphi_4 g_4 = J_2;$$

для узла 2

$$-\varphi_1 g_2 + \varphi_1(g_1 + g_2 + g_3) - \varphi_3 g_3 - \varphi_4 g_1 = -J_1 - J_2 + E_3 g_3;$$

для вузла 3

$$-\varphi_1 g_6 - \varphi_2 g_3 + \varphi_2(g_3 + g_5 + g_6) - \varphi_4 g_5 = -E_3 g_3.$$

Підставивши числові значення в рівняння і розрахувавши їх, знайдемо потенціали вузлових точок: $\varphi_1 = -30$ в, $\varphi_2 = -50$ в та $\varphi_3 = -225$ в.

Нарешті, розрахуємо за законом Ома струми в кожній з гілок:

$$I_1 = (\varphi_4 - \varphi_2)g_1 = [0 - (-50)]10^{-4} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 5 \text{ мА};$$

$$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)g_2 = [-30 - (-50)]0{,}5 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 10 \text{ мА};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_3}{r_3} = \frac{-225 - (-50) + 227}{1 \cdot 10^3} = 95 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 95 \text{ мА};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{r_4} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 15 \text{ мА};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{r_5} = 30 \cdot 10^{-3}\ \text{А} = 30\ \text{мА};$$

$$I_6 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{r_6} = 65 \cdot 10^{-3}\ \text{А} = 65\ \text{мА},$$

3.3.6 Методом вузлових потенціалів знайти струми в схемі (рис. 3.18,а). Дано: $E = 100$ в, $E_2 = 10$ в, $E_5 = 40$ в, $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 30$ Ом, $r_3 = 20$ Ом, $r_4 = 10$ Ом.

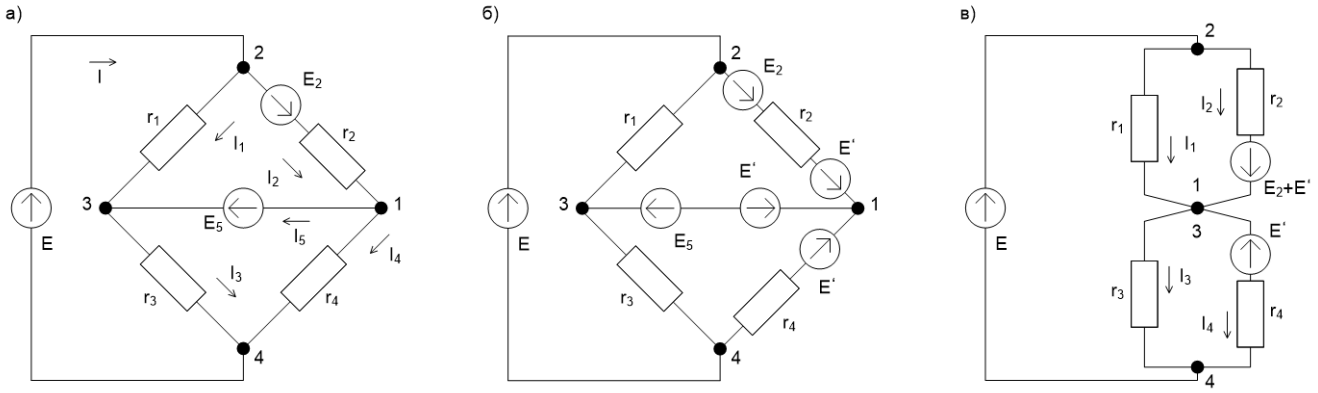

Рис. 3.18

Розв'язання. Всього в схемі чотири вузла ($N_в = 4$), дві гілки, в яких лише джерела напруги: гілки з е.р.с.E та E_5 ($N_н = 2$). Число рівнянь, складених за методом вузлових потунціалів, рівне одному:

$$B = N_в - N_н - 1 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Але при складанні рівнянь для будь якого з вузлів, в нього увійдуть доданки, які мають нескінченно велику провідність.

Покажемо, як цього уникнути.

Відомо, що якщо всі гілки, під'єднані до якогось вузла, і ми введемо однакові е.р.с., які напрямлені до вузла (або від нього), то це не вплине на розподіл струмів в схемі, бо з рівняння другого закону Кірхгофа для будь-якого контура, ці е.р.с. взаємно компенсуються. Скориставшись цією властивістю, введемо до усіх гілок, які з'єднані з вузлом 1, е.р.с. E', напрямлені до вузла і рівні E_5 (рис.3.18,б). Тепер з'ясується, що в гілках 1—3 діють дві однакові і протилежно напрямлені е.р.с., а їх сума рівна нулю. Тому точки 1 та 3 рівнопотенціальні і їх можна закоротити (рис.3.18,в). Ця

схема має три вузли і одну гілку в якій лише е.р.с. $E(N_{\text{н}} = 1)$. За методом вузлових потенціалів треба скласти лише одне рівняння. Складемо його для вузла 1, прийнявши ($\varphi_4 = 0$). Тоді ($\varphi_2 = E = 100$ в. Рівняння для вузла 1 буде мати вигляд:

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} - \varphi_4 g_{14} = \varphi_1(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}) - \varphi_2(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) - \varphi_4(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}) =$$

$$= (E_2 + E')\frac{1}{r_2} + E'\frac{1}{r_4}.$$

Підставляючи сюди числові значення, отримаємо $\varphi_1 = 60$ в.

Нарешті, знайдемо струми в гілках вихідної схеми, за законом Ома:

$$I_1 = 2 \text{ А}; \; I_2 = 3 \text{ А}; \; I_3 = 3 \text{ А}; \; I_4 = 2 \text{ А}.$$

Струми в гілках з е.р.с. E та E_5, знаходимо за першим законом Кірхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 5 \text{ А}; \; I_5 = I_2 - I_4 = 1 \text{ А}.$$

3.3.7 Дано: коло (рис. 3.19,а), $E_1 = 100$ в, $E_2 = 150$в, $E_3 = 28$ в, $J =$ мА, r_2 кОм, $r_3 = 4$ кОм, $r_4 = 6$ кОм, $r_5 = 8$ кОм. Найлегшим способом розрахувати струми у всіх гілках.

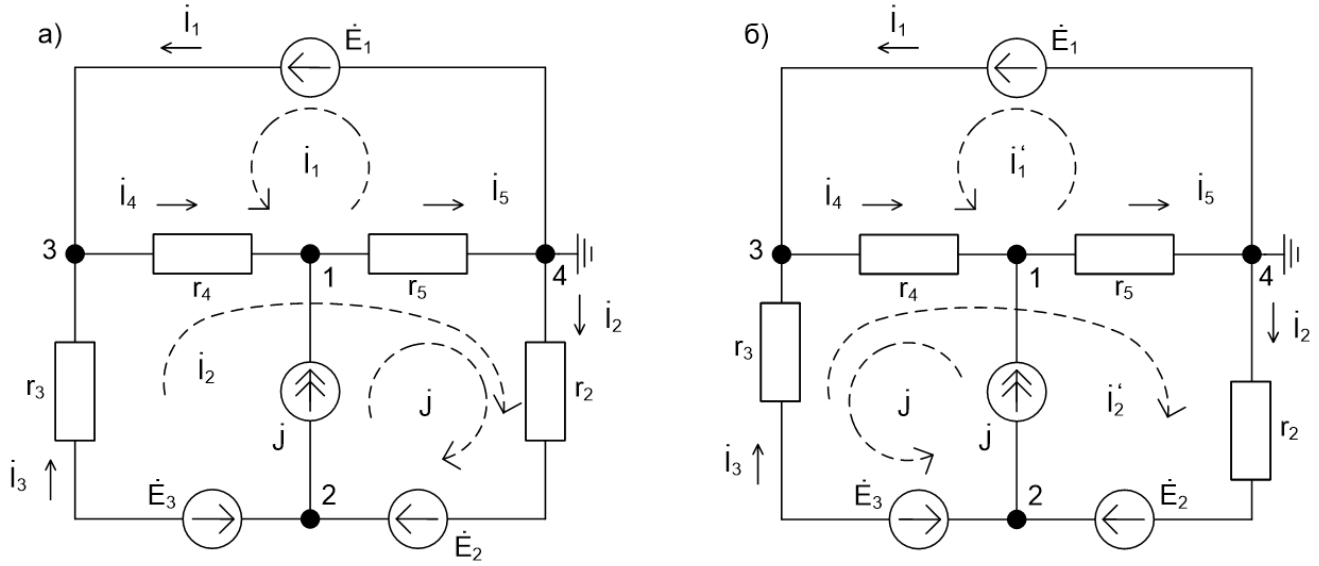

Рис. 3.19

Розв'язання. При розв'язку задачі методом контурних струмів треба скласти два рівняння ($K = N_{\text{г}} - N_{\text{в}} + 1 - N_{\text{с}} = 6 - 4 + 1 - 1 = 2$). За методом вузлових потенціалів треба скласти також два рівняння ($B = N_{\text{в}} - N_{\text{н}} - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$).

Спочатку розв'яжемо задачу методом контурних струмів, обравши їх напрям згідно з рис. 3.19,а:

$$(r_4 + r_5)\mathcal{J}_1 + (r_4 + r_5)\mathcal{J}_2 + r_5 J = E_1;$$

$$(r_4 + r_5)\mathcal{J}_1 + (r_2 + r_3 + r_4 + r_5)\mathcal{J}_2 + r_5 J = E_2 - E_3.$$

Підставивши числові значення і розв'язуючи ці рівняння, знайдемо контурні струми: $\mathcal{J}_1 = 3$ мА, $\mathcal{J}_2 = 3$ мА і струми в гілках:

$$I_1 = \mathcal{J}_1 = 3 \text{ мА};\ I_2 = \mathcal{J}_2 + J = 5 \text{ мА};\ I_3 = \mathcal{J}_2 = 3 \text{ мА};$$

$$I_4 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = 6 \text{ мА},\ I_5 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + J = 8 \text{ мА}.$$

Якщо контурний струм J джерела струму напрявити так, як показано на рис. 3.19,б, а напрям решти контурних струмів залишити незмінним, то контурні рівняння матимуть вигляд:

$$(r_4 + r_5)\mathcal{J}_1' + (r_4 + r_5)\mathcal{J}_2' - r_4 J = E_1;$$

$$(r_4 + r_5)\mathcal{J}_1' + (r_2 + r_3 + r_4 + r_5)\mathcal{J}_2' - r_4 J = E_2 - E_3.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знайдемо контурні струми:

$$\mathcal{J}_1' = 3 \text{ мА};\ \mathcal{J}_2' = 5\text{мА}.$$

Один з них $\mathcal{J}_2'$, відрізняється від раніше знайденого $\mathcal{J}_2$. Однак струми в кожній гілці будуть мати ті ж значення. Дійстно,

$$I_1 = \mathcal{J}_1' = 5 \text{ мА};\ I_2 = \mathcal{J}_2' = 5 \text{ мА};\ I_3 = \mathcal{J}_2' - J = 3 \text{ мА};$$

$$I_4 = \mathcal{J}_1' + \mathcal{J}_2' - J = 6 \text{ мА};\ I_5 = \mathcal{J}_1' + \mathcal{J}_2' = 8 \text{ мА}.$$

Розв'яжемо цю задачу методом вузлових потенціалів. Приймемо потенціал вузла 4 рівним нулю ($\varphi_4 = 0$), тоді потенціал вузла 3 рівний $\varphi_3 = E_1 = 100$ в. Складемо схему рівнянь для вузла 1 та 2 (для цього врахуємо, що

провідність гілок, які з'єднують візли 1 та 2, ($g_{12} = g_{21} = 0$):

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} - \varphi_3 g_{13} = (\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5})\varphi_1 - E_1\frac{1}{r_4} = J;$$

$$-\varphi_2 g_{21} + \varphi_2 g_{22} - \varphi_2 g_{23} = (\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3})\varphi_2 - E_1\frac{1}{r_3} = E_2\frac{1}{r_3} + E_3\frac{1}{r_3}.$$

Розв'язавши ці рівняння, знайдемо потенціали точок 1 та 2:

$$\varphi_1 = 64 \text{ в}; \ \varphi_2 = 140 \text{ в}.$$

Застосовуючи до окремих гілок закон Ома, знайдемо струми в гілках:

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_2}{r_2} = \frac{0 - 140 + 150}{2} = 5 \text{ мА};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_3}{r_3} = \frac{140 - 100 - 28}{4} = 3 \text{ мА};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{r_4} = \frac{100 - 64}{6} = 6 \text{ мА}; I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{r_5} = \frac{64 - 0}{8} = 8 \text{ мА}.$$

Струм, який проходить через джерело E_1, треьа знайти за першим законом Кірхгофа, застосованому до вузла 3 та 4:

$$I_1 = I_4 - I_3 = 6 - 3 = 3 \text{ мА або } I_1 = I_5 - I_2 = 8 - 5 = 3 \text{ мА}.$$

Перевідка показує, що перший закон Кірхгофа для вузлів 1 та 2 здійснюється:

$$J = I_5 - I_4 = 8 - 6 = 2 \text{ мА або } J = I_2 - I_3 = 5 - 3 = 2 \text{ мА}.$$

Зіставлення двох наведених методів розв'язку показує, що хоча в обоз випадках доводиться складнати однакове число рівнянь (по два), другий метод легший, бо одне з рівнянь має лише одну невідому величину.

3.4 Метод накладання. Перетворення трикутника в зірку і навпаки

3.4.1 Методом накладання розрахувати струми в схемі рис. 3.20,а, якщо $E_1 = 10$ в, $E_2 = 40$ в, $E_3 = 5$ в, $r_{10} = 5$ Ом, $r_{20} = r_{30} = 2$ Ом, $r_1 = 30$ Ом, $r_2 = 3$ Ом, $r_3 = 8$ Ом.

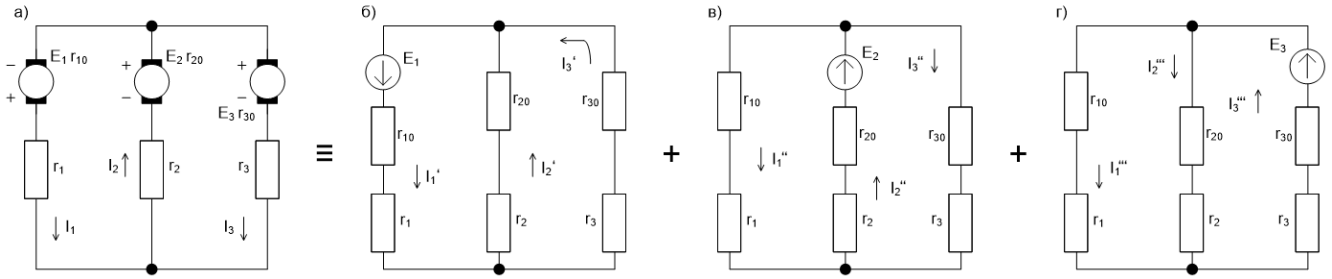

Рис. 3.20

Розв'язання. Позначимо додатні напрями струмів вихідної системи на рис. 3.20,а. Припустимо, що діє лише е.р.с. E_1, а е.р.с. E_2 та E_3 — недієві рис. 3.20,б.

$$I_1' = \frac{E_1}{r_{1?}},$$

де

$$r_{1e} = r_1 + r_{10} + \frac{(r_2 + r_{20})(r_3 r_{30})}{r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30}} = 35 + \frac{5 \cdot 10}{15} = \frac{115}{3} \text{ Ом}.$$

Струм

$$I_1' = 10 : \frac{115}{3} = \frac{6}{23} \text{ А}.$$

Струми в паралельних гілках знаходяться за формулами:

$$I_2' = I_1' \frac{r_3 + r_{30}}{r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30}} = \frac{6}{23} \cdot \frac{10}{15} = \frac{4}{23} \text{ А};$$

$$I_2' = I_1' \frac{r_2 + r_{20}}{r_2 + r_{20} + r_3 + r_{30}} = \frac{6}{23} \cdot \frac{5}{15} = \frac{2}{23} \text{ А};$$

Проведемо розрахунки, допускаючи, що діє сила е.р.с. E_2, а е.р.с. E_1 та E_3 не діють рис. 3.20,в:

$$I_2' = \frac{E_2}{r_{2?}},$$

де

$$r_{2?} = r_2 + r_{20} + \frac{(r_1 + r_{10})(r_3 + r_{30})}{r_1 + r_{10} + r_3 + r_{30}} = \frac{115}{9} \text{ Ом};$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{r_3 + r_{30}}{r_1 + r_{10} + r_3 + r_{30}} = \frac{72}{23} \cdot \frac{10}{46} = \frac{16}{23} \text{ А};$$

$$I_3'' = I_2'' - I_1'' = \frac{72}{23} - \frac{16}{23} = \frac{56}{23} \text{ А}.$$

Аналогічно розрахуємо величини струмів, коли в дії лише одна е.р.с. E_3 рис. 3.20,г

$$r_{3e} = r_3 + r_{30} + \frac{(r_1 + r_{10})(r_2 + r_{20})}{r_1 + r_{10} + r_2 + r_{20}} = \frac{115}{8} \text{ Ом};$$

$$I_3''' = \frac{E_3}{r_{3?}} = 5 : \frac{8}{23} \text{ А};$$

$$I_1''' = \frac{1}{23} \text{ А}; \; I_2''' = \frac{7}{23} \text{ А};$$

Істинне значення струму в кожній гілці знайдеться, як алгебраїчна сума струмів, обумовлена дією кожної е.р.с. окремо.

Струм в першій гілці

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = \frac{6}{23} + \frac{16}{23} + \frac{1}{23} = 1 \text{ А}.$$

Струм в другій гілці

$$I_2 = \frac{4}{23} + \frac{72}{23} - \frac{7}{23} = 3 \text{ А}.$$

Струм в третій гілці

$$I_3 = -\frac{2}{23} + \frac{56}{23} - \frac{8}{23} = 2 \text{ А}.$$

3.4.2 В схемі рис. 3.21,а методом накладання розрахувати всі струми. Дано: $E_1 = 96$ в, $E_2 = 75$ в, $r_3 = 3$ Ом, $r_4 = 15$ Ом, $r_5 = 10$ Ом, $r_6 = 6$ Ом.

Розв'язання. Припустимо, що діє лише е.р.с. E_1, а е.р.с. E_2 — недієва. В цьому випадку схема набере вигляду рис. 3.21,б . Оскільки внутрішній

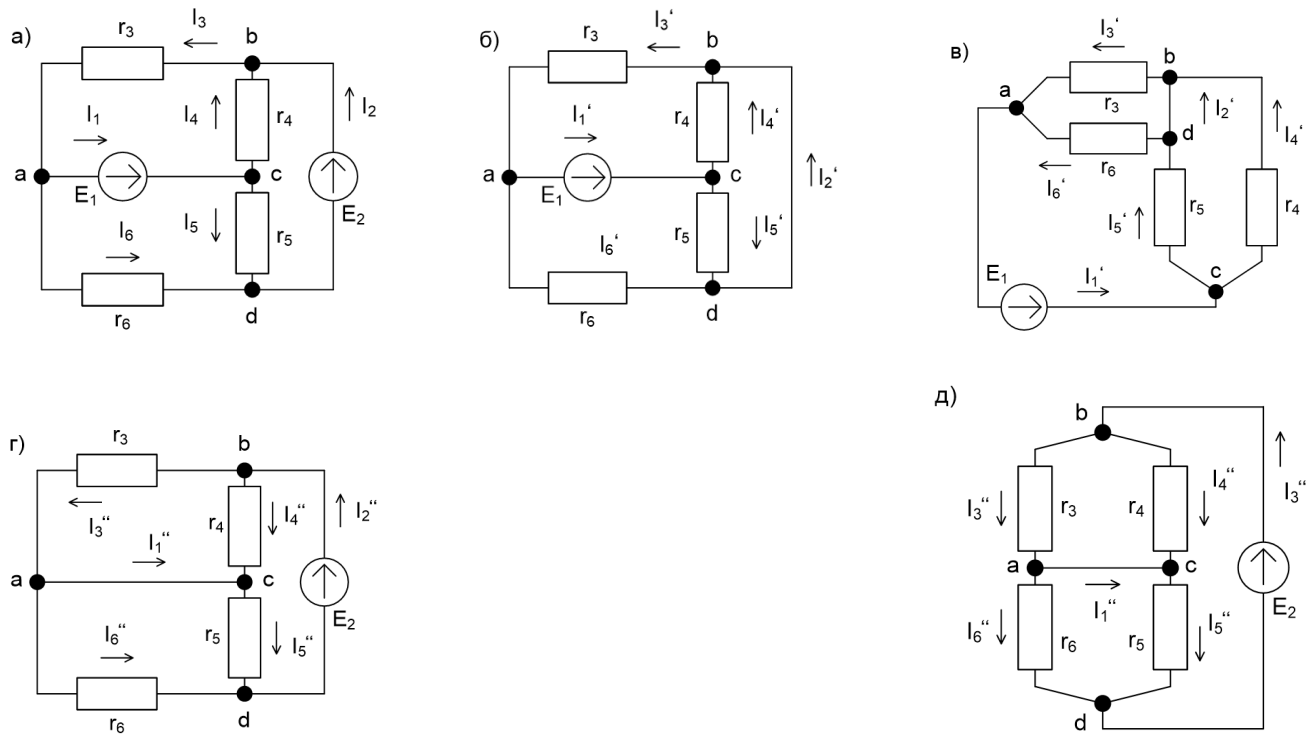

Рис. 3.21

опір джерела напруги E_2 рівний нулю, то на його місці між точками a та b показане коротке замикання. Для більшої наглядності зобразимо у вигляді рис. 3.21,в.

Повний опір цієї схеми

$$r_{1e} = \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6} + \frac{r_4 r_5}{r_4 + r_5} = \frac{3 \cdot 6}{9} + \frac{15 \cdot 10}{25} = 8 \text{ Ом}.$$

Знаходимо всі струми:

$$I_1' = \frac{E_1}{r_{1?}} = \frac{96}{8} = 12 \text{ А};$$

$$I_3' = I_1' \frac{r_6}{r_3 + r_6} = 12 \cdot \frac{6}{9} = 8 \text{ А}; \; I_6' = I_1' - I_3' = 4 \text{ А};$$

$$I_4' = I_1' \frac{r_5}{r_4 + r_5} = 12 \cdot \frac{10}{25} = 4{,}8 \text{ А}; \; I_5' = I_1' - I'4 = 7{,}2 \text{ А};$$

$$I_2' = I_3' - I_4' = 8 - 4{,}8 = 3{,}2 \text{ А або } I_2' = I_5' - I_6' = 3{,}2 \text{ А}.$$

Припустимо, що діє лише е.р.с. E_2, а е.р.с. E_1 — недієва (рис. 3.21,г). Схему для більшої наглідності зобразимо у вигляді (рис. 3.21,д). Повний опір схеми

$$r_{2e} = \frac{r_3 r_6}{r_3 + r_6} + \frac{r_6 r_5}{r_6 + r_5} = \frac{3 \cdot 6}{9} + \frac{6 \cdot 10}{16} = 6{,}25 \text{ Ом}.$$

Знаходимо всі струми:

$$I_2'' = \frac{E_2}{r_{2?}} = \frac{75}{6{,}25} = 12 \text{ А};$$

$$I_3'' = I_2'' \frac{r_4}{r_3 + r_4} = 12 \cdot \frac{15}{18} = 10 \text{ А}; \; I_4'' = I_2'' - I_3'' = 2 \text{ А};$$

$$I_6'' = I_2'' \frac{r_5}{r_4 + r_6} = 12 \cdot \frac{10}{16} = 7{,}5 \text{ А}; \; I_5'' = I_2'' - I_6'' = 4{,}5 \text{ А};$$

$$I_1'' = I_3'' - I_6'' = 10 - 7{,}5 = 2{,}5 \text{ А}.$$

Додаємо алгебраїчно струми, отримані від кожної е.р.с. окремо (рис. 3.21,б та д), знайдемо струми в кожній гілці вихідної схеми (рис. 3.21,а):

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 12 + 2{,}5 = 14{,}5 \text{ А}; \; I_2 = I_2' + I_2'' = 3{,}2 + 12 = 15{,}2 \text{ А};$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 8 + 10 = 14{,}5 \text{ А}; \; I_4 = I_4' - I_4'' = 4{,}8 - 2 = 2{,}8 \text{ А};$$

$$I_5 = I_5' + I_5'' = 7{,}2 + 4{,}5 = 11{,}7 \text{ А}; \; I_6 = I_6'' - I_6' = 7{,}5 - 4 = 3{,}5 \text{ А}.$$

3.4.3 Розв'язати задачу методом накладання рис. 3.12. Дано: $\mathrm{g_г} = 5{\cdot}10^{-5}$ Сім, $J =$ 80 мА, $E_1 = 230$ в, $r_1 = 1$ кОм, $r_2 = 2$ кОм.

Розв'язання. Спочатку припустимо, що діє лише генератор напруги з е.р.с. E_1. В цьому випадку генератор струму слід рахувати недієвим, а в схемі треба залишити лише його провідність $\mathrm{g_г}$ (рис. 3.22,а). Для цієї схеми рохрахуємо струми. Спочатку знайдемо повний опір r_e', яке є сумою опорів r_1 і паралельних опорів r_2, $\frac{1}{\mathrm{g_г}}$:

$$r_\mathrm{e}' = r_1 + \frac{1}{\mathrm{g_г} + \frac{1}{r_2}} = \frac{31}{11} 10^3 \text{ Ом}.$$

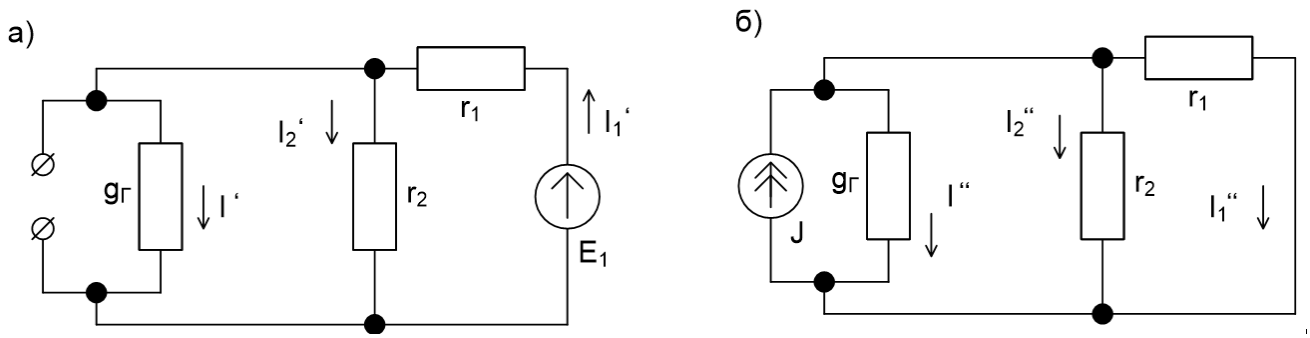

Рис. 3.22

Знаходимо:

$$I_1' = \frac{E_1}{r_e'} = \frac{2530}{31}10^{-3}\ \text{А};$$

$$I_2' = \frac{r_г}{r_г + r_2} = \frac{2300}{31}10^{-3}\ \text{А};\ I' = I_1' - I_2' = \frac{230}{31}10^{-3}\ \text{А}.$$

Тепер припустимо, що коло діє лише з генератором струму, при цьому генератор напруги слід вважати недієвим ($E_1 = 0$) і в схемі треба залишите лише його внутрнішній опір (рис. 3.22,б). Завважимо, що в паралельних гілках струми росподіляються прямо пропорційно їх провідності, знайдемо:

$$I_1'' = J\frac{g_1}{g_1 + g_2 + g_г} = 80{\cdot}10^{-3}\frac{100\cdot 10^{-5}}{100\cdot 10^{-5} + 50\cdot 10^{-5} + 5\cdot 10^{-5}} = \frac{1600}{31}{\cdot}10^{-3}\ \text{А};$$

$$I_2'' = J\frac{g_2}{g_1 + g_2 + g_г} = \frac{800}{31}\cdot 10^{-3}\ \text{А};\ I'' = J\frac{g}{g_1 + g_2 + g_г} = \frac{80}{31}\cdot 10^{-3}\ \text{А},$$

Шукані струми в кожній гілці знайдемо в результаті накладання струмів (з урахуванням їх напрямків), які проходять в кожній з гілок, створені генератором напруги і генератором струму:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 30\ \text{мА};\ I_2 = I_2' + I_2'' = 100\ \text{мА}; I_3 = I' + I'' = 10\ \text{мА}.$$

3.4.4 Знайти еквівалентний опір кола (рис. 3.23,а). і всі струми, якщо $U = 114$ в, $r_1 = 30$ Ом, $r_2 = r_3 = 10$ Ом, $r_4 = 26$ Ом, $r_5 = 11$ Ом, $r_6 = 10$ Ом, $r_7 = 40$ Ом, $r_8 = 50$ Ом. Задачу розв'язати методом перетворення трикутника опорів і еквівалентну зірку.

Розв'язання. Замінимо трикутник опорів abc та dfg еквівалентними зір-

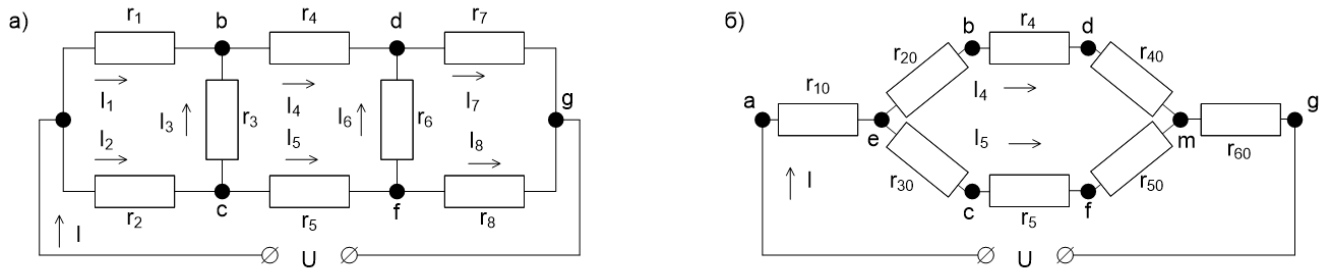

Рис. 3.23

ками (рис. 3.23,б). В перетвореній схемі з'явились нові вузли e та m. Зверніть увагу на те, що в перетвореній схемі зберігаються значення струмів I, I_4, I_5 в ділянках кола, які не підлягались перетвореню.

Підрахуємо опори променів зірок r_{10}, r_{20} та r_{30}, еквівалентні трикутнику abc опорів r_1, r_2, r_3:

$$r_{10} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3} = 6 \text{ Ом}; \; r_{20} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_{30} = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = 2 \text{ Ом}.$$

Знайдемо опори променів зірки r_{40}, r_{50}, r_{60}, еквівалентні трикутнику dfg опорів r_6, r_7, r_8:

$$r_{40} = \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7 + r_8} = 4 \text{ Ом}; \; r_{50} = \frac{r_6 r_8}{r_6 + r_7 + r_8} = 5 \text{ Ом};$$

$$r_{60} = \frac{r_7 r_8}{r_6 + r_7 + r_8} = 20 \text{ Ом}.$$

Вхідні опори всіх схем

$$r_e = r_{20} + r_4 + r_{40} = 36 \text{ Ом}; \; r_{11} = r_{30} + r_5 + r_{50} = 18 \text{ Ом}.$$

Струм в нерозгалуженій частині кола

$$I = \frac{U}{r_e} = \frac{114}{38} = 3 \text{ А}.$$

Струм в паралельних гілках

$$I_4 = I\frac{r_{11}}{r_1 + r_{11}} = 3\frac{18}{38+18} = 1 \text{ А};$$

$$I_5 = I - I_4 = 2 \text{ А}.$$

Тепер знайдемо струми в опорах заданного кола. Для цього попередньо з схеми (рис. 3.23,б). знайти напругу між точками a та b, a та c, c та b, d та

$$U_{ab} = r_{10}I + r_{20}I_4 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24 \text{ в};$$

$$U_{ac} = r_{10}I + r_{30}I_5 = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22 \text{ в};$$

$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = (\varphi_a - \varphi_b) - (\varphi_a - \varphi_c) = \varphi_c - \varphi_b = 24 - 22 = 2 \text{ в};$$

$$U_{dg} = r_{40}I_4 + r_{60}I = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 64 \text{ в};$$

$$U_{fg} = r_{50}I_5 + r_{60}I = 5 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 70 \text{ в};$$

$$U_{fd} = U_{fg} - U_{dg} = (\varphi_f - \varphi_g) - (\varphi_d - \varphi_g) = \varphi_f - \varphi_d = 70 - 64 = 6 \text{ в}.$$

Шукані струми:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{r_1} = \frac{24}{30} = 0{,}8 \text{ А}; \; I_2 = \frac{U_{ac}}{r_2} = \frac{22}{10} = 2{,}2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{cb}}{r_3} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ А}; \; I_4 = 1 \text{ А};$$

$$I_5 = 2 \text{ А}; \; I_6 = \frac{U_{fd}}{r_6} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ А};$$

$$I_7 = \frac{U_{dg}}{r_7} = \frac{64}{40} = 1{,}6 \text{ А}; \; I_8 = \frac{U_{fg}}{r_8} = \frac{70}{50} = 1{,}4 \text{ А}.$$

3.5 Метод еквівалентного генератора

3.5.1 Для схеми (рис. 3.24,а). методом еквівалентного генераторо напруг знайти струм в гілці з опором r_1, якщо $E_1 = 18$ в, $E_2 = 21$ в, $r_{10} = 1$ Ом, $r_1 = 2$ Ом, $r_{20} = 2$ Ом, $r_2 = 7$ Ом, $r_3 = 6$ Ом.

Розв'язання. Позначимо додатні напрми чуканого струму I_1 на вихідній схемі (рис. 3.24,а). Розглянемо частину схеми, під'єднану до досліджувальної першої гілки (обведену штрихованою лінією), в якості еквівалентного

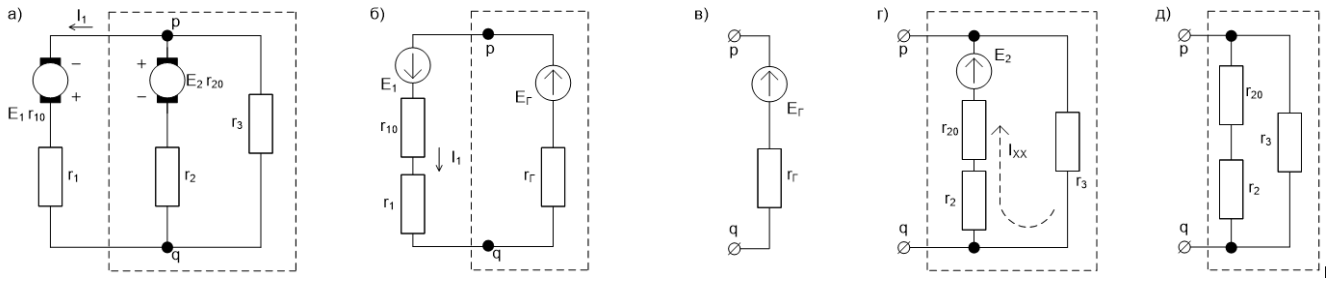

Рис. 3.24

генератора напруги е.р.с. $E_г$ і опір $r_г$. Намалюємо еквівалентну електричну схему з еквівалентним генератором напруги (рис. 3.24,б).

На схемі довільно вибрано додатній напрям е.р.с. еквівалентного генератора $E_г$ до точки p. Це дозволить записати для режиму холостого ходу еквівалентного генератора з відключеною першою гілкою (рис. 3.24,в)

$$E_г = U_{pq\ x.x} = (\varphi_p - \varphi_q)_{x.x}$$

Розвернута схема еквівалентного генератора в режимі хоостого ходу показана на рис. 3.24,г. У внутнішніх гілках генератора струм

$$I_{x.x} = \frac{E_2}{r_3 + r_2 + r_{20}} = \frac{21}{15} = 1{,}4 \text{ А}.$$

Напруга холостого ходу визначається е.р.с. генератора:

$$U_{pq\ x.x} = r_3 I_{x.x} = 6 \cdot 1{,}4 = 8{,}4 \text{ в} = E_г.$$

Знайдемо опір $r_г$ еквівалентного генератора.

Для підрахунку опору генератора перетворимо його схему (рис. 3.24,г), замінивши джерело напруги E_2 короткозамкненою ділянкою (рис. 3.24,д). Вхідний опір останньої схеми це опір еквівалентного генератора

$$r_г = \frac{(r_2 + r_{20})r_3}{r_2 + r_{20} + r_3} = \frac{9 \cdot 6}{15} = 3{,}6 \text{ Ом}.$$

Повертаючись до схеми рис. 3.24,б, знайдемо шуканий струм за законом

Ома:

$$I_1 = \frac{E_г + E_1}{r_г + r_{10} + r_1} = \frac{8{,}4 + 18}{3{,}6 + 1 + 2} = 4 \text{ А}.$$

3.5.2 Методами еквівалентного генератора напруги і еквівалентного генератора струму знайти струм в гілці r_5, якщо $E_1 = E_2 = 20$ в, $r_1 = r_2 = 40$ Ом, $r_3 = 10$ Ом, $r_4 = 160$ Ом, $r_5 = 20$ Ом. (рис. 3.25,а).

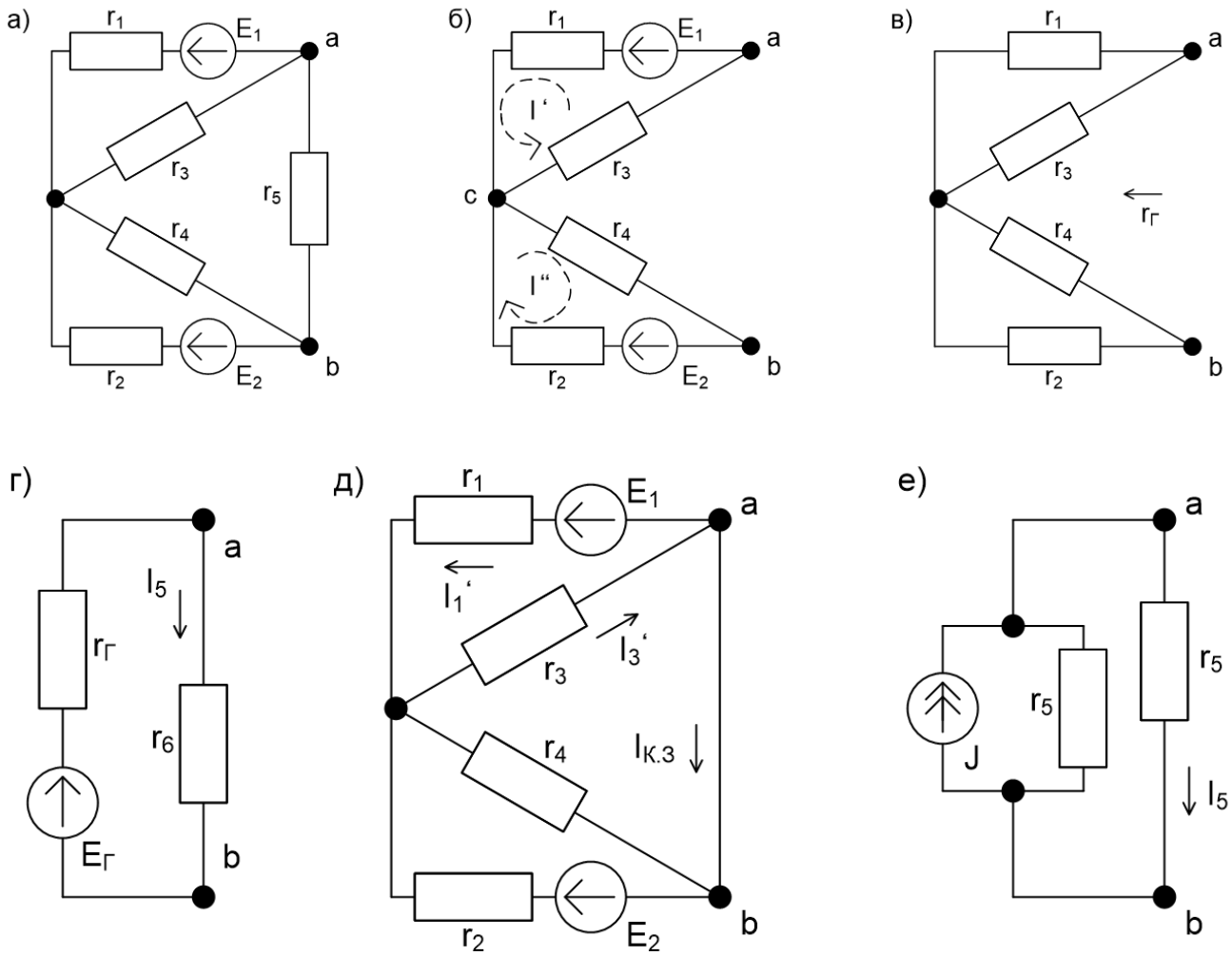

Рис. 3.25

Розв'язання. Розрахунок методом ЕГН. Відключимо гілку з r_5 (рис. 3.25,б) і знайдемо параметри ЕГН з е.р.с. $E_г$, тобто напруга $U_{abx.x}$ холостого ходу між точкаи a та b і $r_г$ - опір схеми рис. 3.25,в між точками a та b в режимі хоостого ходу при закорочених е.р.с. E_1 та E_2. Схема еквівалентного генератора напруги приведена на рис. 3.25,г. Е.р.с. еквівалентного генератора

і його опорів рівні:

$$U_{abx.x} = E_{\text{г}} = -I'r_3 + I''r_4 = -\frac{E_1}{r_1 + r_3}r_3 + \frac{E_2}{r_2 + r_4}r_4 = 12 \text{ в},$$

$$r_{\text{г}} = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + \frac{r_2 r_4}{r_2 + r_4} = 40 \text{ Ом}.$$

Шуканий струм рівний

$$I_5 = \frac{E_{\text{г}}}{r_{\text{г}} + r_5} = \frac{12}{40 + 20} = 0{,}2 \text{ А}.$$

При розрахунках методом ЕГС гілка r_5 закорочується (рис. 3.25,д). Струм $I_{\text{к.з}}$, який проходить по закороченій гілці ab, є струмом еквівалентного генератора струму ($I_{\text{к.з}} = J$). Знайдемо його. Це можна зробити, розрахувавши двохвузлову схему (рис. 3.25,д). методом вузлових потенціалів. Прийнявши потенціал точки a та b рівними нулю ($\varphi_a = \varphi_b = 0$), знайдемо

$$\varphi_c = \frac{E_1\frac{1}{r_1} + E_2\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}} = 6{,}4 \text{ в}.$$

Для того, щоб визначити струм $I_{\text{к.з}} = J$ розрахуємо I_1' та I_3'' і за першим законом Кірхгофа знаходимо

$$I_{\text{к.з}} = J = I_3' - I_1' = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{r_3} - \frac{\varphi_a - \varphi_c + E_1}{r_1} = \frac{6{,}4}{10} - \frac{13{,}6}{40} = 0{,}3 \text{ А}.$$

Опір еквівалентного генератора струму $r_{\text{г}}$ рівний опору еквівалентного генератора напруги, але його можна знайти за наступною формулою:

$$r_{\text{г}} = \frac{E_{\text{г}}}{I_{\text{к.з}}} = \frac{12}{0{,}3} = 40 \text{ Ом}.$$

Із схеми еквівалентного генератора струму (рис. 3.25,е) знаходимо шуканий струм:

$$I_5 = J\frac{r_{\text{г}}}{r_{\text{г}} + r_5} = 0{,}3\frac{40}{40 + 20} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Отримали той самий результат, що і з методу ЕРН.

3.5.3 Методом ЕГН знайти струм I_5 (рис. 3.26,а), який проходить через опір r_5, якщо $E = 120$ в, $r_1 = 60$ Ом, $r_2 = 15$ Ом, $r_3 = 90$ Ом, $r_4 = 60$ Ом, $r_5 = 12$ Ом. Тим же методом знайти струм в опорі r_4.

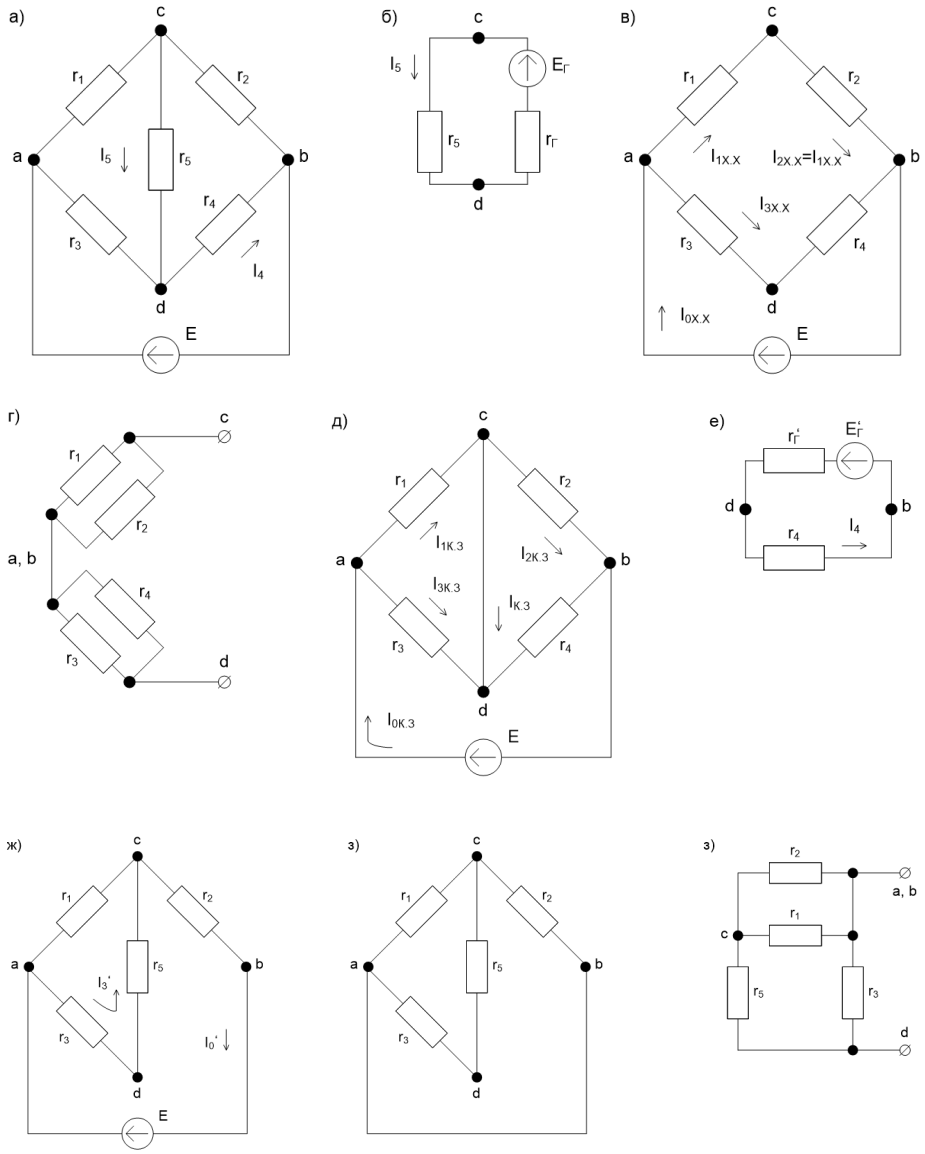

Рис. 3.26

Розв'язання. Позначимо на схемі (рис. 3.26,а), довільні додатні напрями шуканого струму I_5. Частина схеми розглянемо у вигляді деякого генератора напруги $E_г$, $r_г$. Стрілку е.р.с. $E_г$ довільно направимо до точки c (рис. 3.26,б). Таким чино, е.р.с. генератора овизначиться напругою холостого ходу:

$$E_г = U_{cdx.x} = (\varphi_c - \varphi_d)_{x.x}.$$

На розгорнутій схемі генератора в режимі холостого ходу (рис. 3.26,в) позначимо струми в гілках $I_{0\ x.x}$, $I_{1\ x.x}$, $I_{3\ x.x}$.

За законом Ома,

$$I_{1\ x.x} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{120}{75} = 1{,}6 \text{ А};$$

$$I_{3\ x.x} = \frac{E}{r_3 + r_4} = \frac{120}{150} = 0{,}8 \text{ А};$$

$$(\varphi_a - \varphi_c)_{x.x} = U_{ac\ x.x} = r_1 I_{1\ x.x} = 60 \cdot 1{,}6 = 96 \text{ в};$$

$$(\varphi_a - \varphi_d)_{x.x} = U_{ad\ x.x} = r_3 I_{3\ x.x} = 90 \cdot 0{,}8 = 72 \text{ в}.$$

Таким чином, е.р.с. еквівалентного генератора напруги

$$E_{\text{г}} = (\varphi_c - \varphi_d)_{x.x} = (\varphi_c - \varphi_a + \varphi_a - \varphi_d)_{x.x} = (\varphi_a - \varphi_d)_{x.x} - (\varphi_a - \varphi_c)_{x.x} = 72 - 96 = -24 \text{ в}.$$

Знайдемо опір ЕГН двома способами:

1. Шляхом розрахунку за схемою. Для цього в схемі рис. 3.26,в джерело напруги замінимо короткозамкненою ділянкою. Після цього схему рис. 3.26,в зобразимо у вигляді рис. 3.26,г. Опір генератора $r_{\text{г}}$ рівний опору кола між точками c та d:

$$r_{\text{г}} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = \frac{60 \cdot 15}{75} + \frac{90 \cdot 60}{150} = 48 \text{ Ом}.$$

2. Шляхом розрахунку відношення е.р.с. еквівалентного генератора до струму короткого замикання. Для цього треба в схемі рис. 3.26,в замкнути точки c та d накоротко, розрахувати струм $I_{\text{к.з}}$, який проходить через короткозамкнену ділянку (рис. 3.26,д), і знайти опір короткого замикання. Джерело напруги E в короткозамкнутій схемі рис. 3.26,д, навантажимо на еквівалентний опір

$$r_e = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_3} + \frac{r_2 r_4}{r_2 + r_4} = \frac{60 \cdot 90}{150} + \frac{15 \cdot 60}{75} = 48 \text{ Ом}.$$

Струм джерела напруги

$$I_{0\ \text{к.з}} = \frac{E}{r_e} = \frac{120}{48} = 2{,}5 \text{ А}.$$

Струми в гілках:

$$I_{1\ \text{к.з}} = I_{0\ \text{к.з}} \frac{r_3}{r_1 + r_3} = 2{,}5 \cdot \frac{90}{150} = 1{,}5\ \text{А};$$

$$I_{2\ \text{к.з}} = I_{0\ \text{к.з}} \frac{r_4}{r_4 + r_4} = 2{,}5 \cdot \frac{60}{75} = 2\ \text{А}.$$

Звідки

$$I_{\text{к.з}} = I_{1\ \text{к.з}} - I_{2\ \text{к.з}} = -0{,}5\ \text{А}.$$

Опір генератора

$$r_{\text{г}} = \frac{E_{\text{г}}}{I_{\text{к.з}}} = \frac{-24}{-0{,}5} = 48\ \text{Ом}.$$

Значення опора генератора, отримані цими способамми, рівні.

Повертаючись до схеми рис. 3.26,б, знаходимо шуканий струм I_5 за законом Ома:

$$I_5 = \frac{E_{\text{г}}}{r_5 + r_{\text{г}}} = -\frac{24}{12 + 48} = -0{,}4\ \text{А}.$$

Таким чином, струм в опорі r_4 тече від точки d до точки c і рівний 0,4 А.

Розрахунок струму в опорі r_4 методом еквівалентного генератора напруг проводиться аналогічно. Заміняємо частину схеми, підключену до точок d та b гілкb з опором r_4, еквівалентним генератором $E'_{\text{г}}$, $r'_{\text{г}}$ (рис. 3.26,е). Е.р.с. генератора співпадає з напругою в режимі холостого ходу:

$$E'_{\text{г}} = U'_{db\ x.x}.$$

Для розрахунку цього навантаження розрахуємо спочатку струми I'_3 та I'_0 в розгорнутій схемі генератора в режимі холостого ходу (рис. 3.26,ж):

$$I'_0 = \frac{E}{r_2 + \frac{r_1(r_3+r_5)}{r_1+r_3+r_5}} = \frac{216}{95}\ \text{А}\ ; I'_3 = I'_0 \frac{r_1}{r_1 + r_3 + r_5} = \frac{16}{19}\ \text{А}.$$

Звідси знаходимо е.р.с. генератора:

$$E'_{\text{г}} = U'_{db\ x.x} = r_5 I'_3 + r_2 I'_0 = \frac{840}{19}\ \text{в}.$$

Для визначення опору генератора розглянемо відповідну пасивну схему (в схемі генератора напруги замінений короткозамкненим відрізком), показано на рис. 3.26,з. Для ясності ця схема показана у вигляді рис. 3.26,и.

Опір генератора, рівний вхідному опору останньої схеми відносно затискачів d та b,

$$r'_{\text{г}}\frac{r_3(r_5+\frac{r_1r_2}{r_1+r_2})}{r_3+r_5+\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}}=\frac{360}{19}\ \text{Ом}.$$

Нарешті знаходимо шуканий струм I_4 за схемою еквівалентного генератора (рис. 3.26,е):

$$I_4=\frac{E'_{\text{г}}}{r'_{\text{г}}+r_4}=\frac{\frac{840}{19}}{\frac{360}{19}+60}=0{,}56\ \text{А}.$$

3.5.4 Знайти струм I_3 в гілці з опором $r_3=12$ Ом (рис. 3.27,а). Е.р.с. генераторів напруг $E_1=120$ в, $E_2=100$ в, їх внутрішній опір $r_1=6$ Ом, $r_2=4$ Ом.

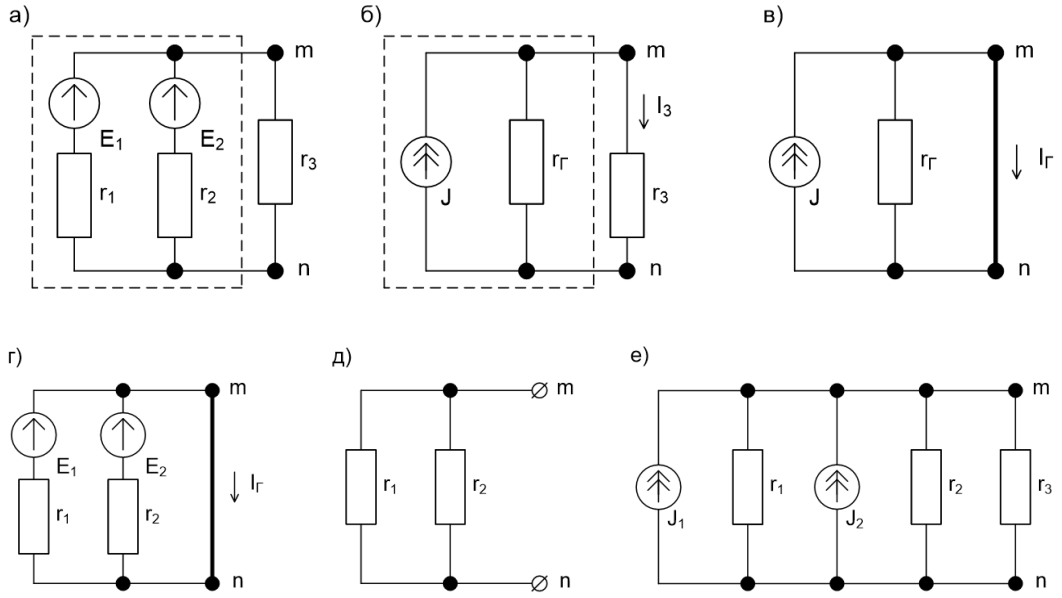

Рис. 3.27

Розв'язання. Задачу розв'язуємо двома способами: 1) методом ЕНС і 2) методом перетворення.

1. Частину схеми, підключену до затискачів m та n гілки з опором r_3 (на рис. 3.27,а обведена штрихованою лінією), можна розглядати у вигляді

еквівалентного генератора струму J, $r_г$ (на рис. 3.27,б обведено штрихованою лінією). Струм генератора J знаходиться за опором короткого замикання (рис. 3.27,в).

На розвернутій схемі генератора (рис. 3.27,г)

$$J = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} = 45 \text{ А},$$

а внутнішній опір генератора струму рівний опору пасивного кола між зажимами m та n при разімкненій гілці r_3 (рис. 3.27,д)

$$r_г = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 2{,}4 \text{ Ом}.$$

За схемою еквівалентного генератора струму, представленого на рис. 3.27,б, знаходимо струм:

$$I_3 = J\frac{r_г}{r_г + r_3} = 45 \cdot \frac{2{,}4}{2{,}4 + 12} = 7{,}5 \text{ А}.$$

2. При розв'язанні методом перетворення заміняємо генератори напруги схеми рис. 3.27,а, еквівалентними генераторами струму (рис. 3.27,е). Струми генераторів:

$$J_1 = \frac{E_1}{r_1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ А}; \;\; J_2 = \frac{E_2}{r_2} = \frac{100}{4} = 25 \text{ А}.$$

Перетворимо отриману схему, замінивши парапельні опори r_1 та r_2 на еквівалентні опори

$$r_г = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2{,}4 \text{ Ом},$$

і паралельні джерела струму J_1 та J_2 —одним еквівалентним джерелом струму J ; отримаємо схему рис. 3.27,б, до того ж

$$J = I_1 + I_2 = 20 + 25 = 45 \text{ А}.$$

Струм J останньої схеми розходиться по опорам $r_г$ та r_3

$$I_3 = J\frac{r_г}{r_г + r_3} = 45 \cdot \frac{2{,}4}{2{,}4 + 12} = 7{,}5 \text{ А}.$$

3.5.5 Два генератора струму з'єднані в коло рис. 3.28,а. Струм першого генератора $J_1 = 3$ мА, його внутрішня провідність $g_1 = 0{,}05$ Сім, другого генератора $J_2 = 2$ мА, $g_2 = 0{,}01$ Сім. Опір $r_3 = 5$ Ом, $r_4 = 30$ Ом. Знайти струм, який проходить через опір r_4.

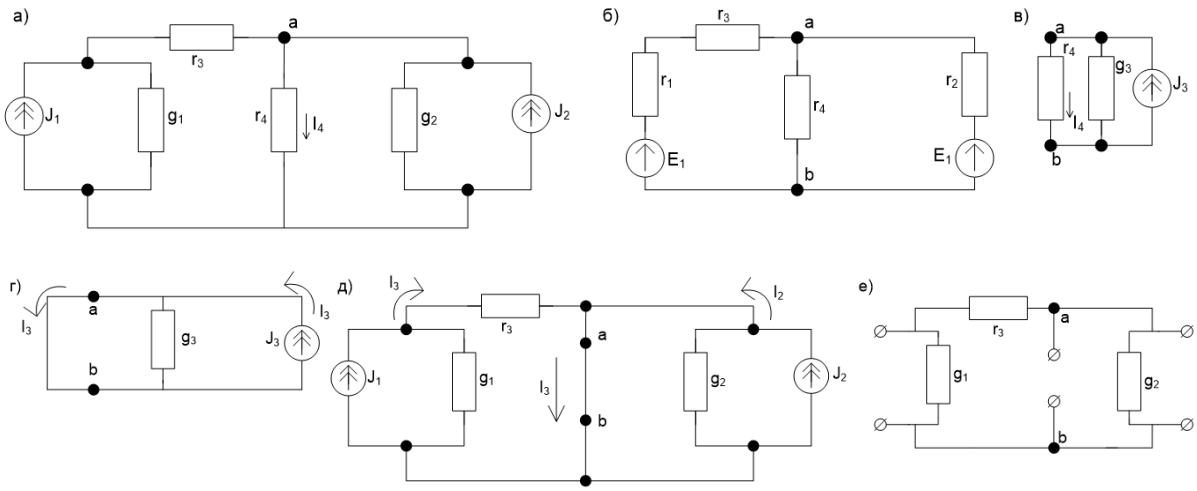

Рис. 3.28

Розв'язання. 1. Перетворимо генератори струму в еквівалентні генератори напруги рис. 3.28,б. Е.р.с. і внутрішній опір генераторів напруги знаходимо наступним чином:

$$E_1 = \frac{J_1}{g_1} = \frac{3}{0{,}05} = 60 \text{ мв}; \; r_1 = \frac{1}{g_1} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ Ом}.$$

$$E_2 = \frac{J_2}{g_2} = \frac{2}{0{,}01} = 200 \text{ мв}; \; r_2 = \frac{1}{g_2} = 100 \text{ Ом}.$$

Далі будь-яким способом знаходимо шуканий струм. Виберемо метод вузлових потенціалів. Позначимо $g_1' = \frac{1}{r_1+r_3}$, знаходимо:

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1' + E_2 g_2}{g_1' + g_2 + g_4} = \frac{60\frac{1}{20+5} + 200\frac{1}{100}}{\frac{1}{20+5} + \frac{1}{100} + \frac{1}{30}} = 52{,}8 \text{ мв};$$

$$I_4 = \frac{U_{ab}}{r_4} = \frac{52{,}8}{30} = 1{,}76 \text{ мА}.$$

2. Розв'яжемо задачу методом еквівалентного генератора. Для цього замінимо все коло, за виключенням гілки з r_4, еквівалентним генератором

струму (рис. 3.28,в). Для знаходження його параметрів J_e та g_e спочатку виключимо гілку з r_4, а точки a та b закоротимо (рис. 3.28,г). Знайдемо струм короткого замикання, який рівний J_e. Для цього попередньо визначимо струми I_3 та I_2 (рис. 3.28,д):

$$I_3 = J_1 \frac{\frac{1}{g_1}}{\frac{1}{g_1} + r_3} = 2{,}4 \text{ мА}; I_2 = J_2 = 2 \text{ мА}.$$

Отже, струм еквівалентного генератора струму

$$J_e = I_3 + I_2 = 2{,}4 + 2 = 4{,}4 \text{ мА}.$$

Знайдемо внутрнішню провідність еквівалентного генератора струму g_e між точками a та b. Для цього виключимо генератори струму і залишимо лише їх внутрішню провідність (рис. 3.28,е):

$$g_e = g_{ab} = \frac{1}{r_e + \frac{1}{g_1}} + g_2 = \frac{1}{5 + 20} + 0{,}01 = 0{,}05 \text{ Сім}.$$

В шуканій гілці (рис. 3.28,в) струм

$$I_4 = J_e \frac{\frac{1}{g_e}}{\frac{1}{g_e} + r_4} = 4{,}4 \frac{10}{20 + 30} = 1{,}76 \text{ мА}.$$

3.5.6 Знайти струм в гілці r_5 з (рис. 3.14). Струм генератора $J = 50$ мА, джерело напруги $E = 60$ в, опір $r_1 = 5$ кОм, $r_2 = 4$ кОм, $r_3 = 16$ кОм, $r_4 = 2$ кОм, $r_5 = 8$ кОм.

Розв'язання. 1. Для ясності перемалюємо схему у (рис. 3.29,а). Еквівалентність схем очевидна: до відповідних вузлів обох схем підходять однакові струми. В тому числі, результуючий струм, підводимо до вузла a, рівний нулю. Перетворимо генератор струму J останньої схеми в генератори з е.р.с. E_1 та E_3 (рис. 3.29,б):

$$E_1 = Jr_1 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^3 = 250 \text{ в}.$$

$$E_3 = Jr_3 = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^3 = 800 \text{ в}.$$

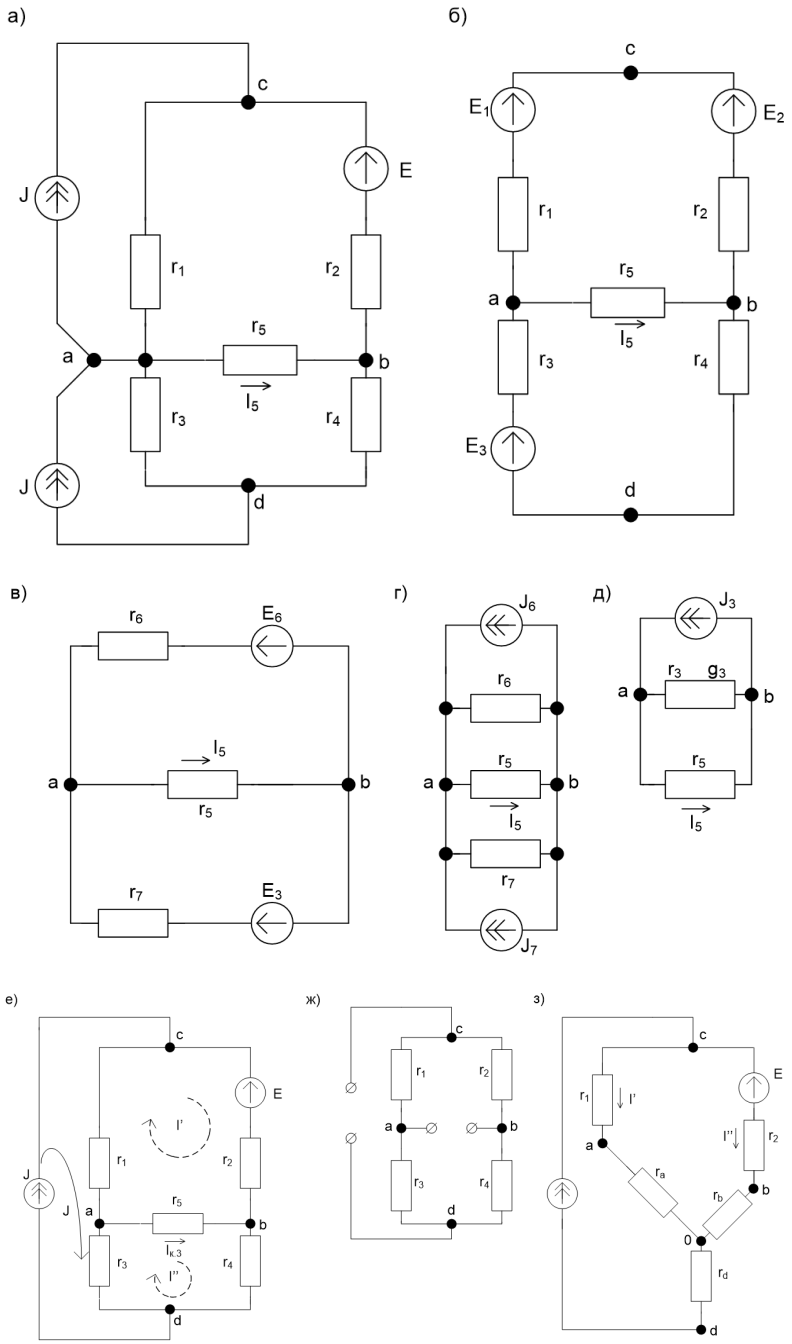

Рис. 3.29

Додаючи останні елементи гілок, приходимо до рис. 3.29,в, для якого:

$$E_6 = E - E_1 = 60 - 250 = -190 \text{ в},$$

$$r_6 = r_1 + r_2 = 9 \text{ кОм}; \; r_7 = r_3 + r_4 = 18 \text{ кОм}.$$

Перетворимо схему рис. 3.29,г:

$$J_6 = \frac{E_6}{r_6} = -\frac{190}{9} = -21{,}1 \text{ мА}; \;\; J_7 = \frac{E_7}{r_7} = \frac{800}{18} = 44{,}4 \text{ мА}.$$

Склавши паралельні елементи, перетворимо схему в рис. 3.29,д:

$$I_e = I_6 + I_7 = -21{,}1 + 44{,}4 = 23{,}3 \text{ мА};$$

$$r_e = \frac{r_6 r_7}{r_6 + r_7} = \frac{9 \cdot 18}{9 + 18} = 6 \text{ кОм}.$$

В гілку r_5 підходить частина струму I_e, рівна

$$I_5 = I_e \frac{r_e}{r_e + r_5} = 23{,}3 \cdot \frac{6}{14} = 10 \text{ мА}.$$

2. Метод ЕГН. Знайдемо струм еквівалентного генератора струму, який рівний струму $I_{\text{к.з}}$ при замиканні накоротко опору r_5 (рис. 3.29,е). Струм $I_{\text{к.з}}$ можна знайти різними способами, наприклад методом контурних струмів:

$$(r_1 + r_2)\mathcal{J}' - r_1 J = -E;$$
$$(r_3 + r_4)\mathcal{J}'' - r_3 J = 0.$$

Підставлячи числові значення і розв'язуючи ці рівняння, знайдемо:

$$\mathcal{J}' = 21{,}1 \text{ мА}; \;\; \mathcal{J}'' = 44{,}4 \text{ мА}; \;\; I_e = I_{\text{к.з}} = \mathcal{J}'' - \mathcal{J}' = 23{,}3 \text{ мА}.$$

Далі розрахуємо внутрішню провідність g_e генератора струму. Вона рівна провідності пасивного кола між затискачами a та b при розімкненій гілці з r_5 (рис. 3.29,ж); гілка, в якій генератор струму, показара розімкненою, оскільки внутрішній опір ідеального генератора струму нескінченно великий:

$$\mathrm{g}_e = \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} \text{ Сім}; \;\; r_e = \frac{1}{\mathrm{g}_e} = 6 \cdot 10^3 \text{ Ом}.$$

На рис. 3.29,д наведено схему еквівалентного генератора струму відносно

затискачів a та b. З неї знаходимо шуканий струм:

$$I_5 = I_e \frac{r_e}{r_5 + r_e} = 23{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{6 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ мА}.$$

3. Перетворимо трикутник опорів $r_3 r_4 r_5$ в еквівалентку зірку (рис. 3.29,з). Її опір рівний:

$$r_a = \frac{r_3 r_5}{r_3 + r_4 + r_5} = \frac{64}{13} \text{ кОм}; \; r_b = \frac{8}{13} \text{ кОм}; \; r_d = \frac{16}{13} \text{ кОм}.$$

Отримана схема має всього два вузла 0 та c. Прийнявши потенціал вузлової точки 0 рівним нулю ($\varphi_0 = 0$), розрахуємо потенціал точки c:

$$\varphi_c = \frac{E \frac{1}{r_2 + r_b} + J}{\frac{1}{r_1 + r_a} + \frac{1}{r_2 + r_b}} = 198 \text{ в}.$$

Звертаємо увагу на т, що в знаменнику останього виразу віднутній доданок, враховуючи опір r_d, це пов'язано з тим, що опір джерела струму нескінченно великий і додаючи до нього кінцевий опір r_d не змінить нескінченно великий опір гілки джерела струму.

За законом Ома знайдемо струми:

$$I' = \frac{\varphi_c - \varphi_0}{r_1 + r_a} = 20 \text{ мА}, I'' = \frac{\varphi_c - \varphi_0 - E}{r_2 + r_b} = 30 \text{ мА}.$$

і напруга між точками a та b:

$$U_{ab} = I' r_a - I'' r_b = 80 \text{ в}.$$

Нарешті знаходимо шуканий струм

$$I_5 = \frac{U_{ab}}{r_5} = 10 \text{ мА}.$$

3.5.7 Три генератора напруг, е.р.с. яких $E_1 = 48$ в, $E_2 = 45$ в, $E_3 = 45$ в, а внутрішній опір $r_1 = 1{,}2$ Ом, $r_2 = 1$ Ом, $r_3 = 1{,}5$ Ом, працюють паралельно на загальне навантаження, опір якого $r = 4{,}2$ Ом (рис. 3.30). Зробити заміну заданих генераторім напруг одним еквівалентним, знайти

його е.р.с. і внутрішній опір. Чому рівні струми, які протікають через кожен генератор і навантаження?

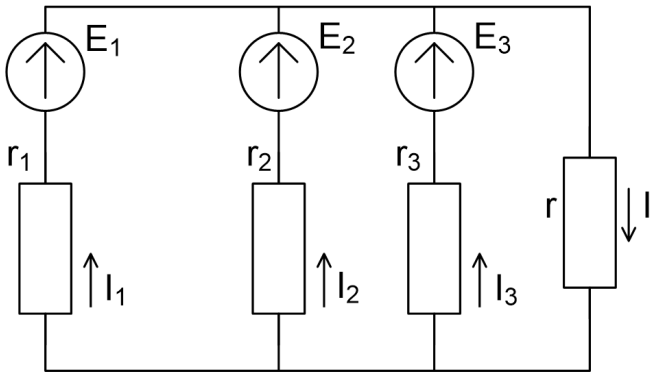

Рис. 3.30

Розв'язання. Значення е.р.с. і внутрішнього опору еквівалентного генератора напруг може бути визначена як:

$$E_e = U_{ab} = \frac{E_1\frac{1}{r_1} + E_2\frac{1}{r_2} + E_3\frac{1}{r_3}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}} = \frac{115}{2{,}5} = 46 \text{ в};$$

$$\frac{1}{r_e} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = 2{,}5 \text{ Сім}; \; r_e = 0{,}4 \text{ Ом}.$$

Струм в навантажені

$$I = \frac{E_e}{r + r_e} = \frac{46}{4{,}2 + 0{,}4} = 10 \text{ А}.$$

Напруга на навантажені

$$U_{ab} = Ir = 10 \cdot 4{,}2 = 42 \text{ в}.$$

Така ж напруга на кожній з паралельних гілок. Струм в кожній з гілок знайдемо за формулами:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{r_1} = 5 \text{ А}; \; I_2 = \frac{E_2 - U_{ab}}{r_2} = 3 \text{ А}; \; I_3 = \frac{E_3 - U_{ab}}{r_3} = 2 \text{ А}.$$

Перевірка показує, що струм в навантажені I рівний сумі струмів I_1, I_2 та

I_3.

3.5.1 В схемі (рис. 3.31,а). відомо: $E = 100$ в, $E_2 = 45$ в, $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 40$ Ом, $r_3 = 12$ Ом. При якому значенні навантажувального опору $r_н$ в ньому виділиться максимальна потужність і чому вона буде рівна?

Знайти відношення потужності, яка використовується $r_н$ до тої яка надходить з джерела. Розрахувати коефіцієнт передачі, тобто, відношення напруги на $r_н$ до е.р.с. E.

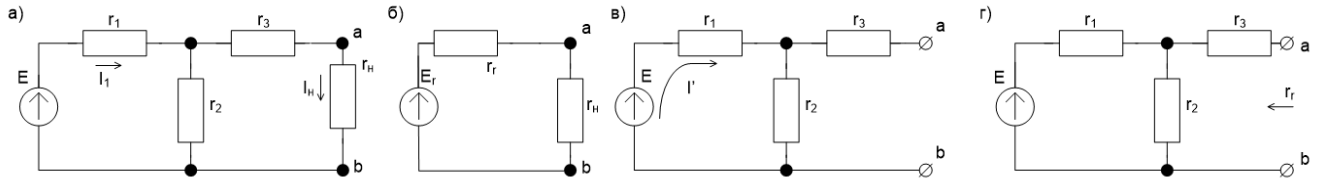

Рис. 3.31

Розв'язання. 1. Розрахувати струм $I_н$, який проходить через опір $r_н$, ф потужність яка в ньому використовується $P_н$:

$$I_н = I_1 \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_н} = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3+r_н)}{r_2+r_3+r_н}} \cdot \frac{r_2}{r_2 + r_3 + r_н} =$$

$$= \frac{E r_2}{r_1(r_2 + r_3 + r_4) + r_2(r_3 + r_н)}; \tag{3.8}$$

$$P_н = I_н^2 r_н = \frac{E^2 r_2^2 r_н}{[r_1(r_2 + r_3 + r_н) + r_2(r_3 + r_н)]^2}. \tag{3.9}$$

Для розрахунку матсимальної потужності, яка виділяється з навантаження, візьмемо похідну від $P_н$ по $r_н$ і прирівняємо її до нуля. В результаті отримаємо

$$r_н = \frac{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}{r_1 + r_2} = \frac{10 \cdot 40 + 10 \cdot 12 + 40 \cdot 12}{50} = 20 \text{ Ом}.$$

Підставляючи знайдене значення $r_н$ у (3.9), отримаємо чукану величину максимальної потужності:

$$P_{н\ \max} = \frac{100^2 \cdot 40^2 \cdot 20}{(10 \cdot 72 + 40 \cdot 32^2)^2} = 80 \text{ Вт}.$$

Розрахувати потужність P, яка надходить з джерела е.р.с.:

$$P = EI_1 = \frac{E}{r_1 + \frac{r_2(r_3+r_н)}{r_2+r_3+r_н}} = 360 \text{ Вт}.$$

Шукане відношення потужностей

$$\eta = \frac{P_{н\ \max}}{P} = \frac{80}{30} = 0{,}222.$$

Напруга на навантажувальному опорі

$$U_н = I_н r_н = 2 \cdot 20 = 40 \text{ в}.$$

Коефіцієнт передачі

$$K = \frac{U_н}{E} = \frac{40}{100} = 0{,}4.$$

2. Частина схеми лівіше затискачів ab замінимо еквівалентним генератором напруг з е.р.с. $E_г$ і опір $r_г$ (рис. 3.31,б). Знайдемо $E_г$ та $r_г$. Для розрахунку $E_г$ відключемо гілку $r_г$ (рис. 3.31,в) і знайдемо напругу $U_{ab\ x.x}$ між точками a та b в режимі холостого ходу, яка чисельно рівна $E_г$:

$$U_{ab\ x.x} = E_г = I' r_2 = \frac{E r_2}{r_1 + r_2} = \frac{100 \cdot 40}{50} = 80 \text{ в}.$$

Опір $r_г$ рівній опору кола між затискачами a та b при закороченому джерелі е.р.с. E (рис. 3.31,г):

$$r_г = r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 12 + \frac{10 \cdot 40}{50} = 20 \text{ Ом}.$$

Як відомо, в схемі, еквівалентній заданій (рис. 3.31,б), максимально потужність виділиться, якщо опір навантаження $r_н$ буде рівний внутрішньому опору генератора, тобто при $r_н = r_г = 20$ Ом. Отже, отримано те ж значення, яке було знайдене. Максимальна потужність

$$P_{н\ \max} = I^2{}_н r_н = (\frac{E_г}{r_г + r_н})^2 r_н = (\frac{80}{40})^2 20 = 80 \text{ Вт}.$$

4 Задачі для самостійного розв'язку

4.1 Розрахунок еквівалентних опорів

4.1.1 Знайти опір кожної гілки з кола (рис. 4.1, а-г) між затискачами $1-1'$ при холостому ході (точки 2 та $2'$ розімкнені) та при короткому зимиканні (точки 2 та $2'$ закорочено). Опори в омах дано на схемі

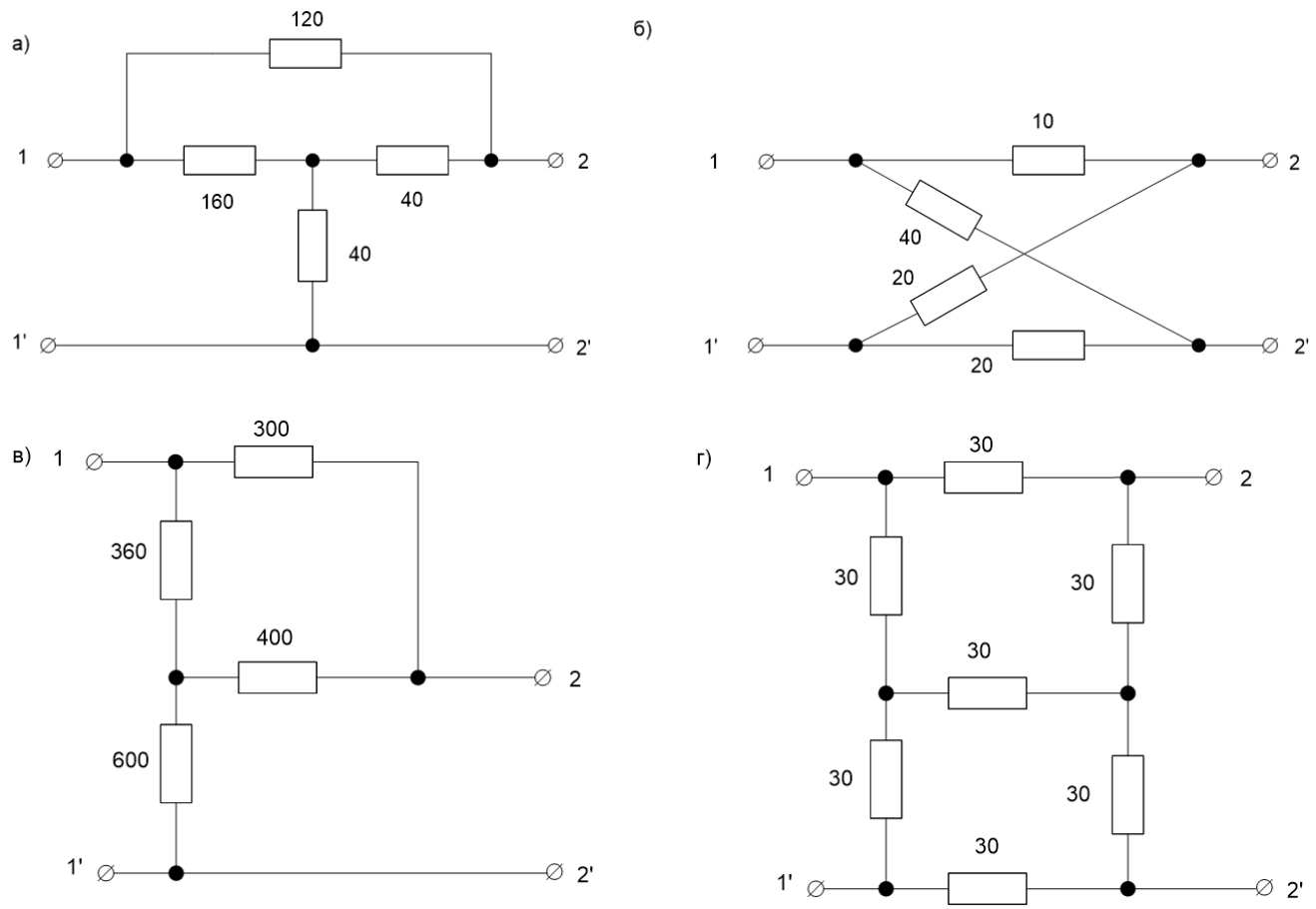

Рис. 4.1

4.2 Закони Ома і Кірхгофа. Баланс потужностей

4.2.1 Знайти покази вольтметра (рис. 4.2), опір якого досить великий в порівнянні з r_1 та r_2.

4.2.2 Для схеми рис. 4.3 побудувати потенційні графіки $0abcdfghkl$ при розімкненому та замкненому ключі.

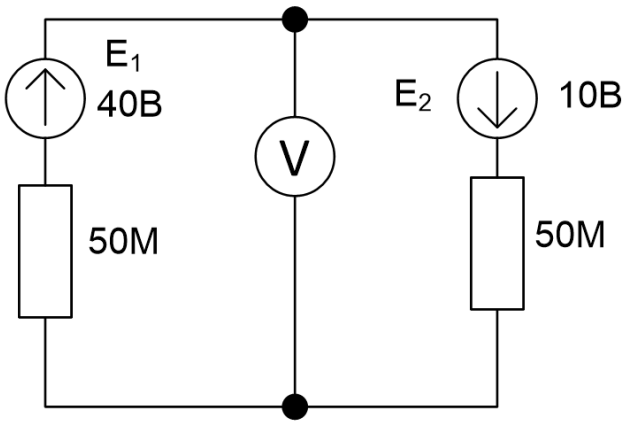

Рис. 4.2

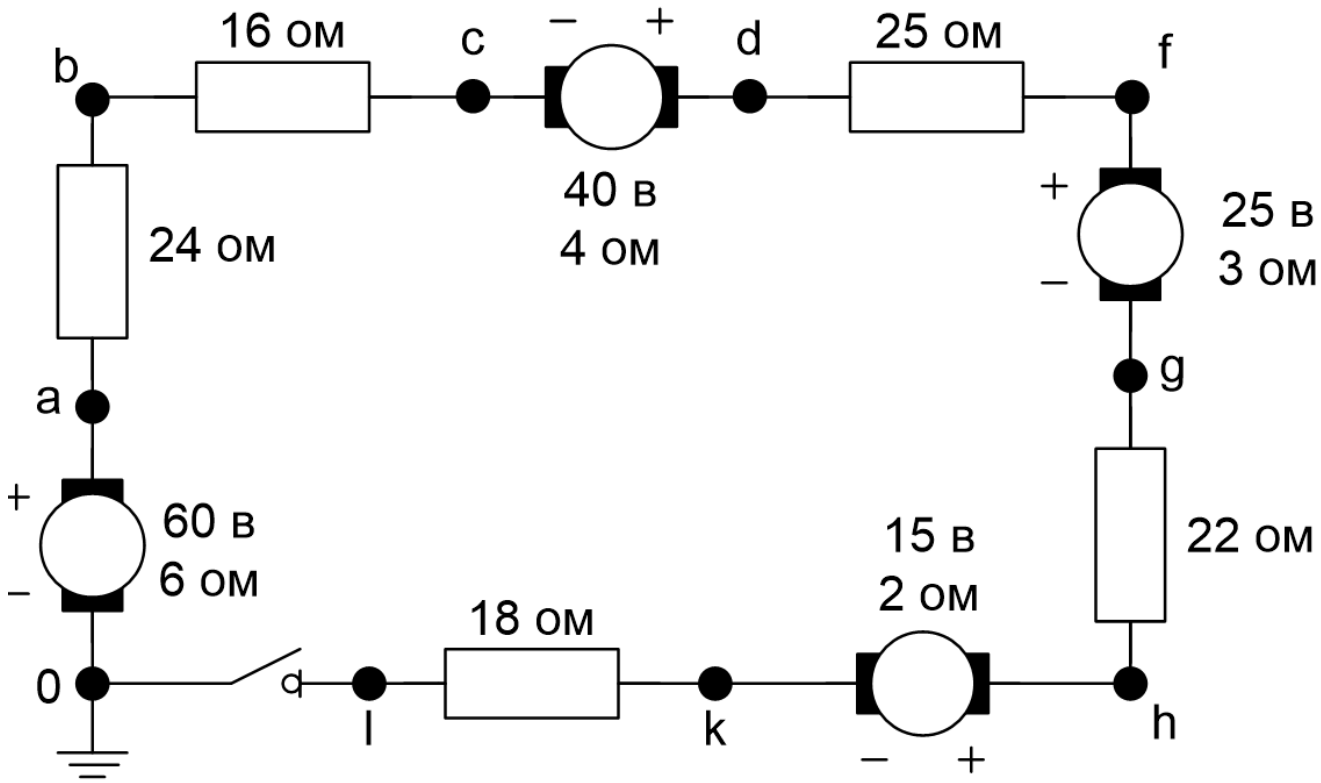

Рис. 4.3

4.2.3 Для кола рис. 4.4,а та б знайти відношення напруг на виході U_2 (вихідні затискачі кола розімкнені) до напруги на вході кола U_1. Опір окремих гілок кола в омах вказані на схемі.

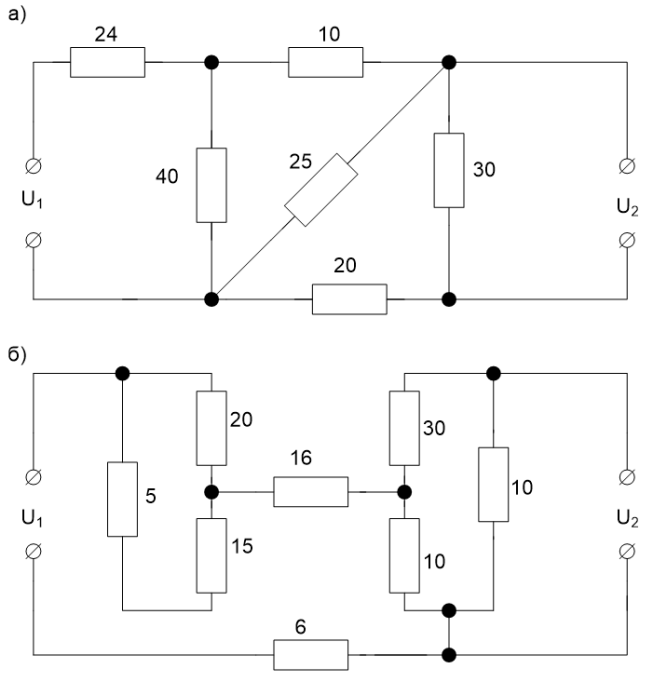

Рис. 4.4

4.2.4 В колі рис. 4.5 знайти E_1 та r_x, якщо $E_2 = 3$ в, $r_1 = r_2 = 1$ кОм, $r_3 = 4$ кОм, $r_4 = 2$ кОм, $r_5 = 1$ кОм. Амперметр A_1 показує 4 мА, а $A_4 - 3$ мА; полярність приладів вказані на схемі, а їх опорами можна знехтувати.

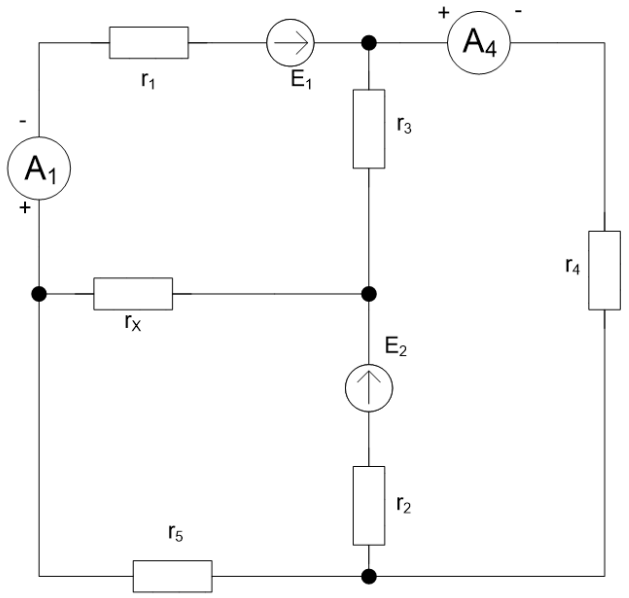

Рис. 4.5

4.2.5 В схеми рис. 4.6 знайти всі струми.

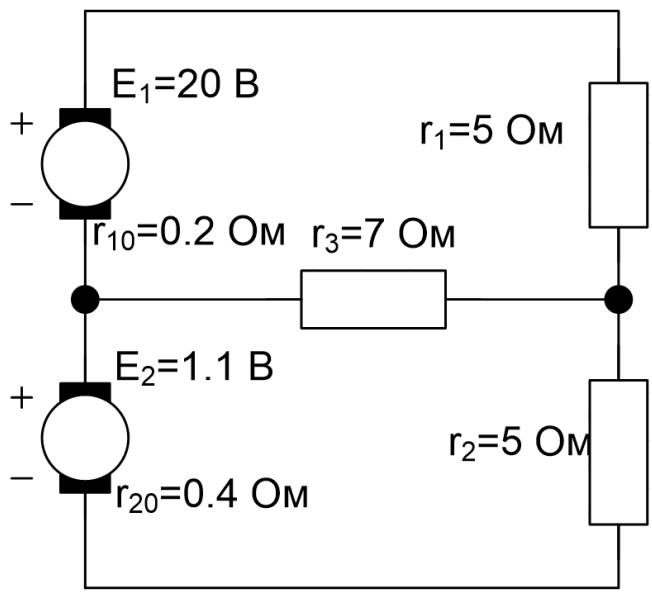

Рис. 4.6

4.2.6 Для кола, зображеного на рис. 4.7 розрахувати струми та знайти показання вольтметра, якщо $E_1 = 40$ в, $E_2 = 5$ в, $E_3 = 25$ в, $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = r_3 = 10$ Ом. Струмом, який тече через вольтметро можна знехтувати.

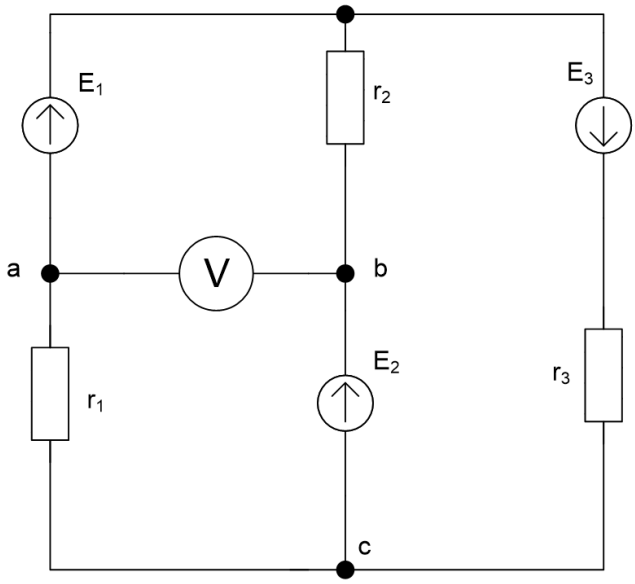

Рис. 4.7

4.2.7 Для схеми рис. 4.8 знайти струми й перевірити баланс потужностей, якщо $U_{ab} = 12$ в, $U_{cd} = 5{,}6$ в, $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 5$ Ом, $r_3 = 3$ Ом.

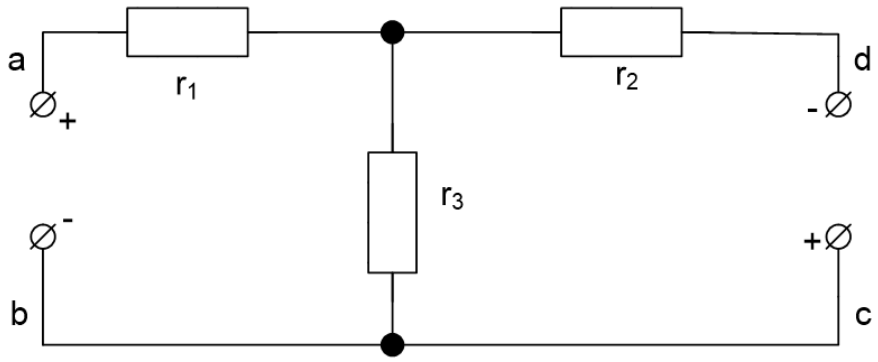

Рис. 4.8

4.2.8 В колі рис. 4.9 знайти струми й перевірити баланс потужностей.

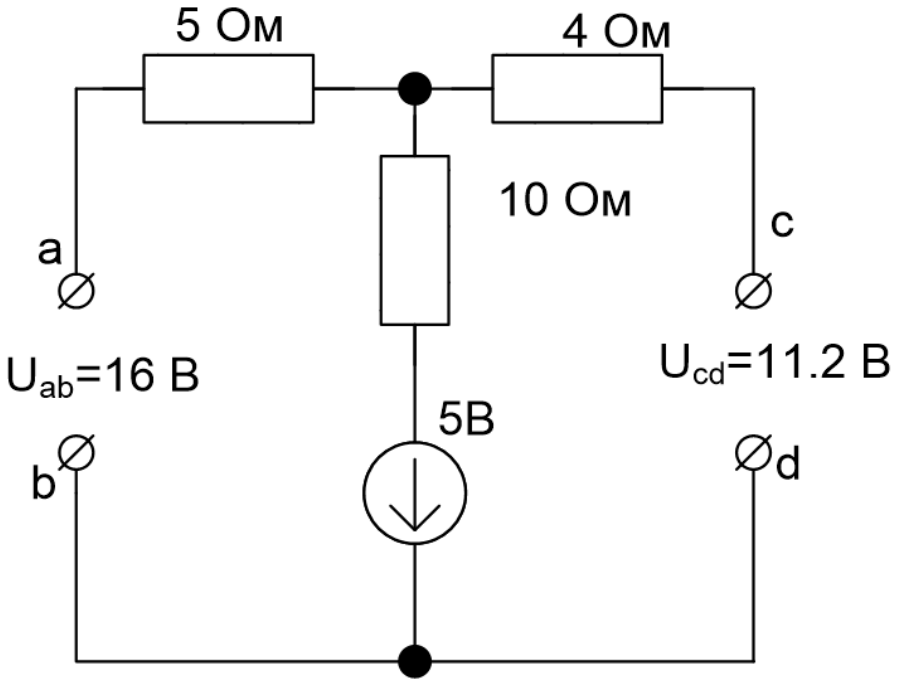

Рис. 4.9

4.2.9 Джерело струму $J = 30$ мА (рис. 4.10). Чому рівні струмки в гілках, опір яких $r_1 = 1{,}8$ кОм, $r_2 = 3$ кОм, $r_3 = 1{,}5$ кОм, $r_4 = 2$ кОм? Знайти напругу на джерелі струму.

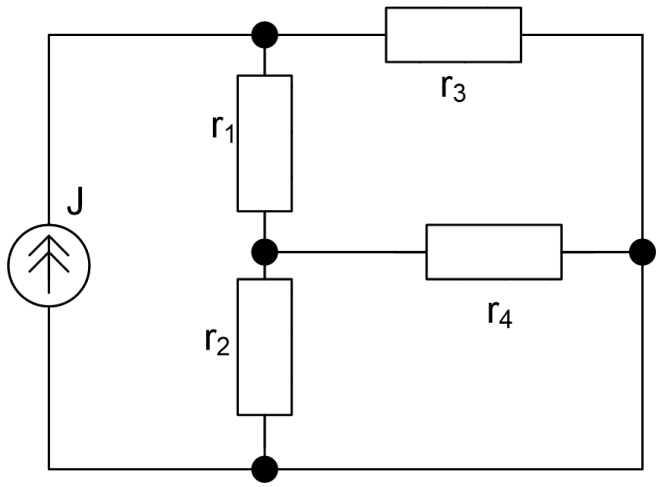

Рис. 4.10

4.2.10 Два джерела струму $J_1 = 100$ мА та $J_2 = 50$ мА (рис. 4.11) включені в схему, з опорами $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $r_3 = 30$ Ом.

Знайти всі струми й перевірити баланс потужностей.

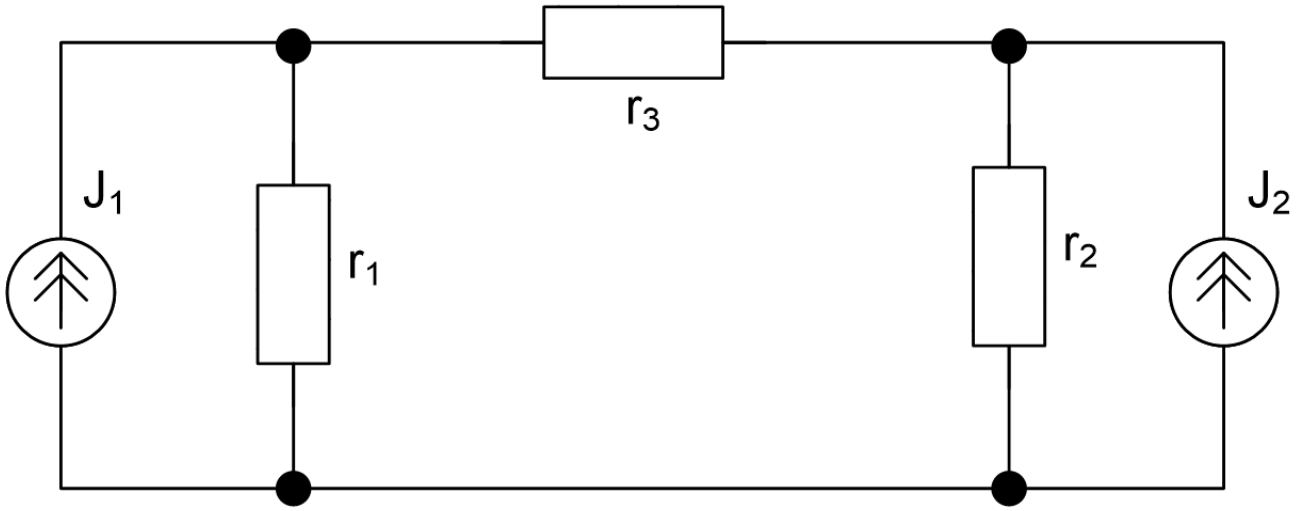

Рис. 4.11

4.3 Методи контурних струмів і вузлових потенціалів

4.3.1 Знайти всі струми й визначити потенціал точок a, b, c відносно землі 0 (рис. 4.12). Задачу розв'язати методом контурних струмів. Дано: $E_1 = 85$ в, $E_2 = 84$ в, $E_3 = 5$ в, $E_4 = 12$ в, $r_1 = 8$ Ом, $r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 10$ Ом,

$r_6 = 4$ Ом.

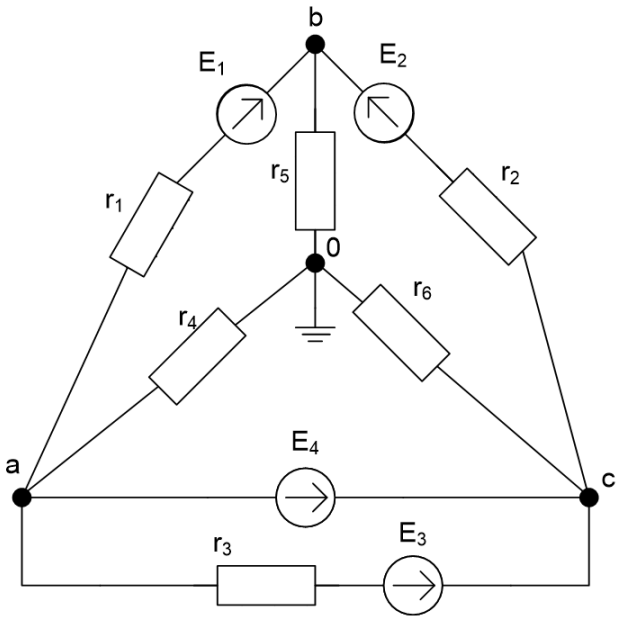

Рис. 4.12

4.3.2 Для схеми рис. 4.13 знайти струми. Дано струми та внутрішня провідність генераторів струму $J_1 = 50$ мА, $g_1 = 10^{-4}$ Сім, $J_2 = 60$ мА, $g_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ Сім, е.р.с. генератора напруги $E_3 = 270$ в; опори $r_3 = 1$ кОм, $r_4 = 2$ кОм, $r_5 = 7{,}5$ кОм, $r_6 = 3$ кОм,

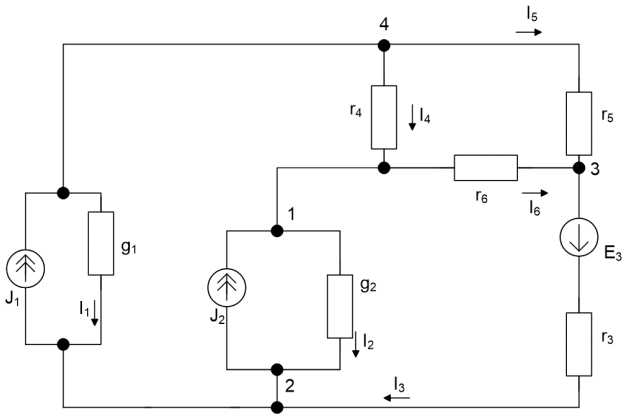

Рис. 4.13

4.3.3 Методом вузлових потенціалів розрахувати струми в колі (рис. 4.14)

4.3.4 Два джерела струму $J_1 = 100$ мА та $J_2 = 50$ мА (рис. 4.11) включені в схему, з опорами $r_1 = 20$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $r_3 = 30$ Ом. Знайти всі струми

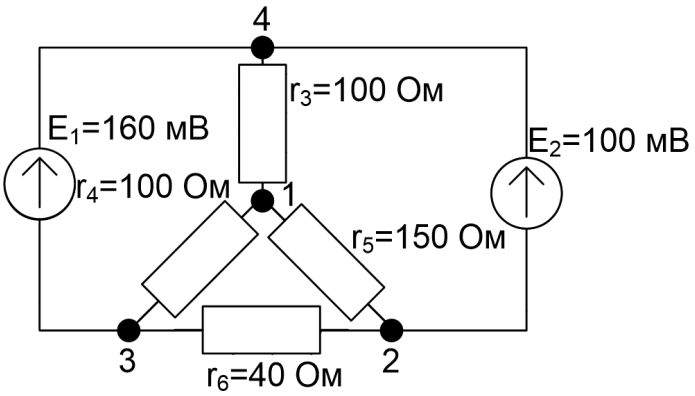

Рис. 4.14

й перевірити баланс потужностей. Розв'язати задачу методом вузлових потенціалів.

4.3.5 Знайти струми в колі рис. 4.15. Дано $J_1 = 10$ мА, $g_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ Сім, $J_2 = 45$ мА, $g_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Сім, $E_3 = 40$ в, $r_3 = 250$ Ом, $E_4 = 55$ в, $r_4 = 300$ Ом, $r_5 = 500$ Ом, $r_6 = 200$ Ом. Розв'язати задачу методом контурних струмів та вузлових потенціалів.

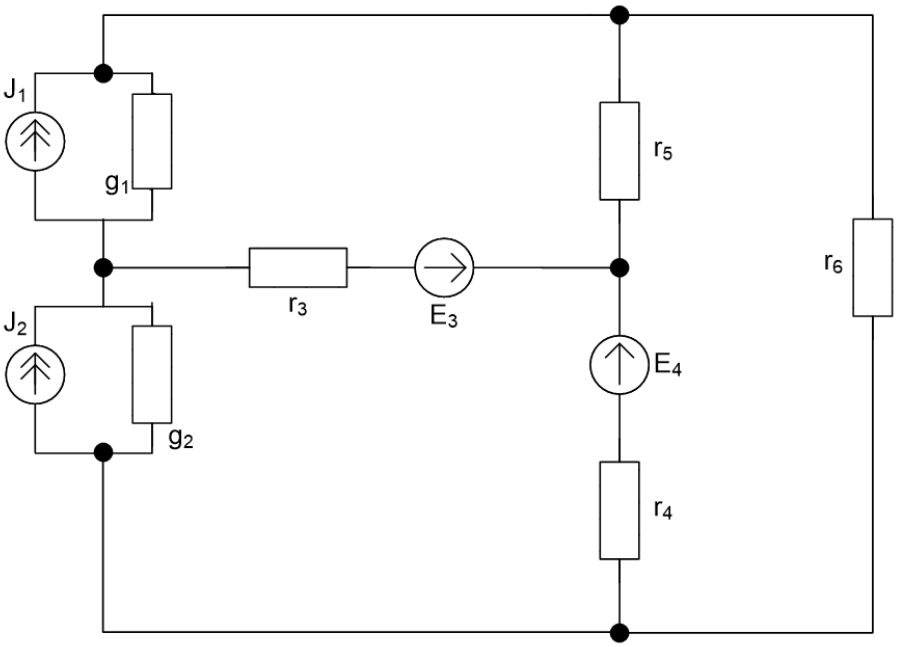

Рис. 4.15

4.4 Метод накладання. Перетворення трикутника в зірку і навпаки

4.4.1 Знайти струми в гілках кола рис. 4.16. Розв'язати задачу методом накладання, контурних струмів та вузлових потенціалів.

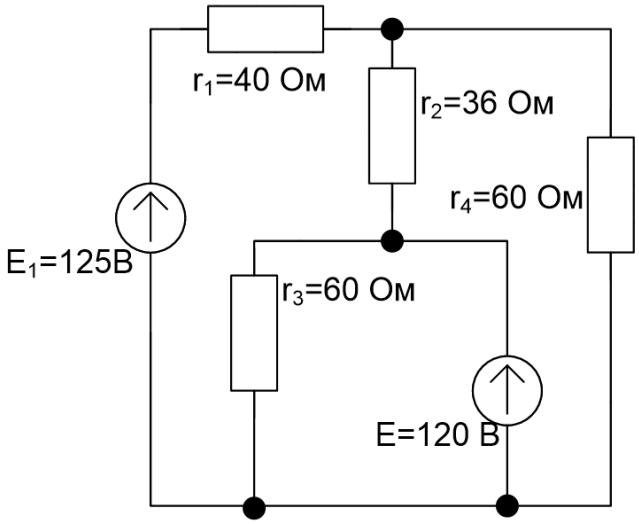

Рис. 4.16

4.4.2 В схемі рис. 4.17 знайти струми, застосувавши перетворення трикутника в зірку. Знайти еквівалентний опір між точками a та b.

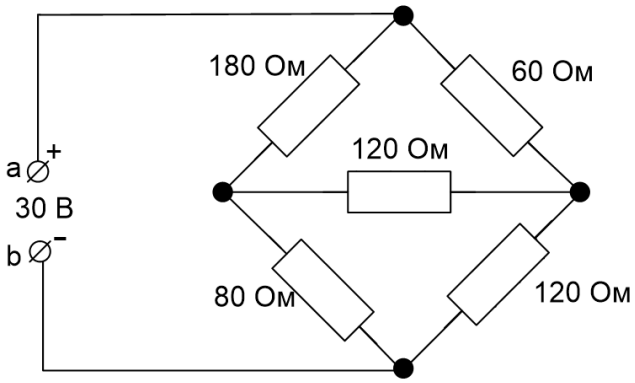

Рис. 4.17

4.4.3 Знайти струми, які проходять в усіх гілках схеми рис. 4.18, якщо $E = 213$ в, $E_1 = 90$ в, $r_1 = 6$ Ом, $r_2 = 40$ Ом, $r_3 = 10$ Ом, $r_4 = 100$ Ом,

$r_5 = 60$ Ом. Задачу розв'язати перетворенням трикутника в еквівалентну зірку. Знайти вхідний опір відносно гілки r_1.

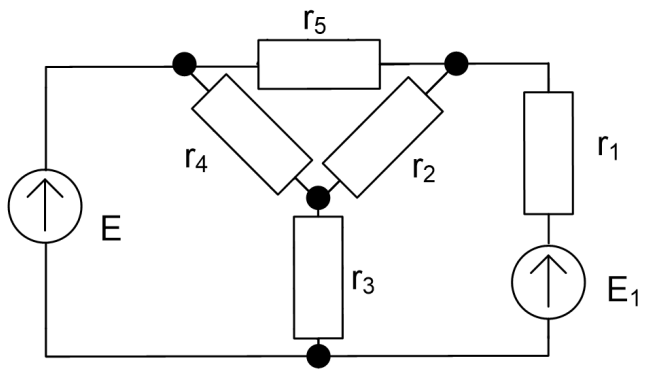

Рис. 4.18

4.5 Метод еквівалентного генератора

4.5.1 Вважаючи затискачі a та b вхідними клемами схеми (рис. 4.19,а-д), знайти параметри $E_г$ та $r_г$ відповідних генераторів (рис. 4.19,е).

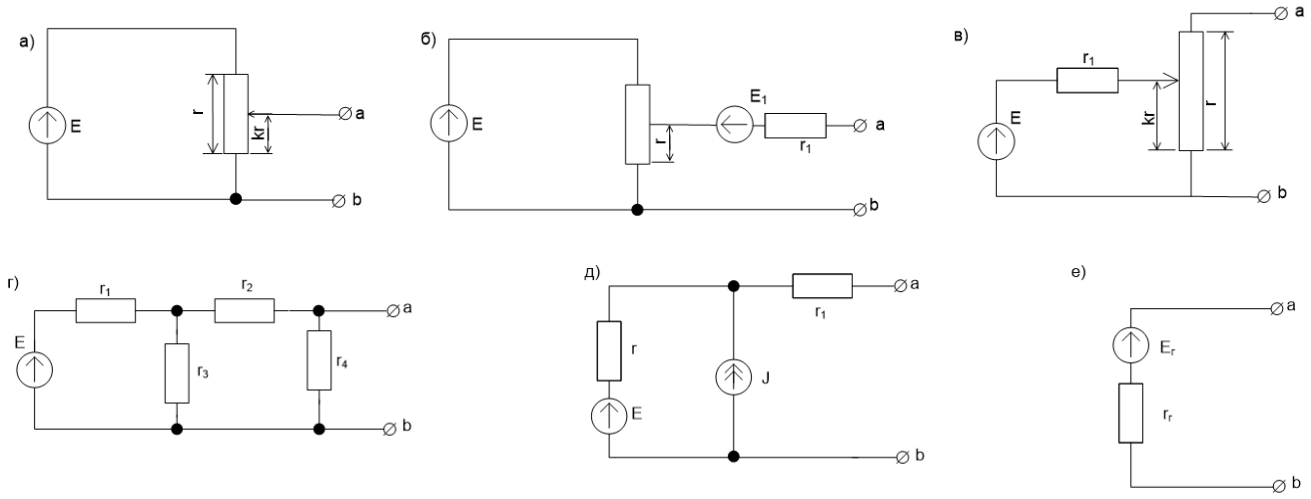

Рис. 4.19

4.5.2 Для експериментального дослідження двополюсника зібрана схема рис. 4.20. Треба знайти е.р.с. і опір генератора, еквівалентно досліджених двополюсників, по данним двох дослідів (для кожного двополюсника): 1) $U_1 = 20$ в,

$I_1 = 2$ А, $U_2 = 30$ в, $I_2 = 3$ А; 2) $U_1 = 20$ в, $I_1 = 12$ А, $U_2 = 30$ в, $I_2 = 14$ А; 3) $U_1 = 20$ в, $I_1 = 3$ А, $U_2 = 30$ в, $I_2 = 5$ А.

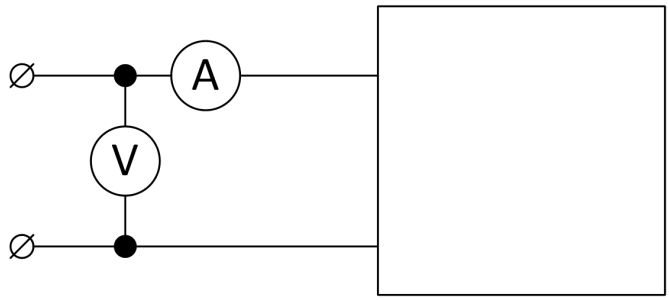

Рис. 4.20

4.5.3 Коло рис. 4.21 в якому наявні два генератора струму ($J_1 = 30$ мА, $g_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ Сім, $J_2 = 20$ мА, $g_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Сім) та генератор напруги ($E_3 = 45$ в, $r_3 = 100$ Ом), включено на навантажувальний опір $r_н = 20$ Ом. Знайти струм $I_н$.

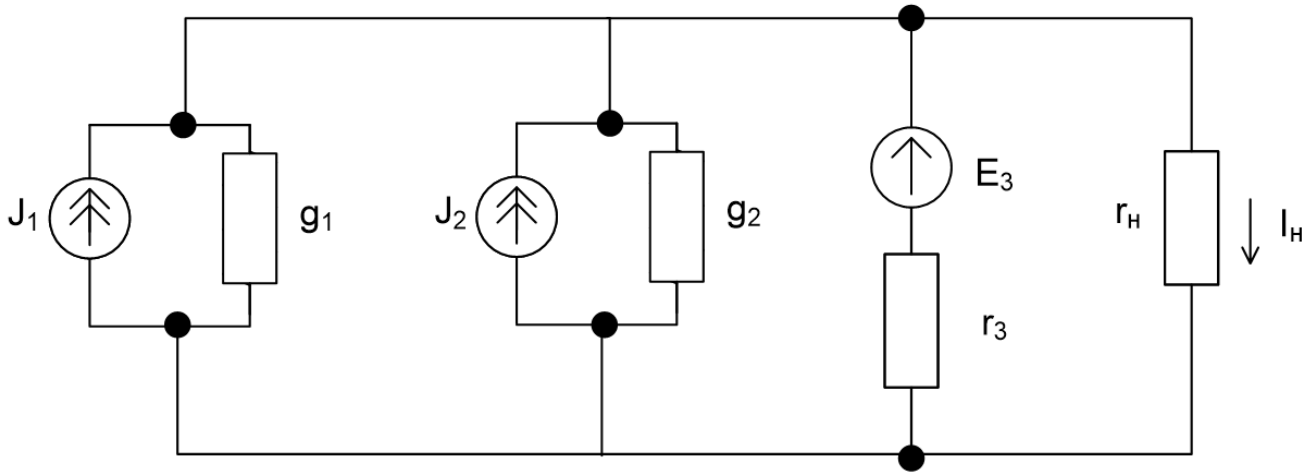

Рис. 4.21

4.5.4 Скориставшись принципом взаємності, знайти показання амперметрів A_4 та A_5 рис. 4.22. Дано: $E = 30$ в, $r_1 = 6$ кОм, $r_2 = 4$ кОм, $r_3 = 8$ кОм, $r_4 = r_5 = 2$ кОм.

4.5.5 В схемі рис. 4.23 найпростішим способом знайти струми. Дано: $E_1 = 100$ в, $E_2 = 80$ в, $E_3 = 40$ в, $r_1 = r_2 = 10$ Ом, $r_3 = 20$ Ом, $r_4 = 15$ Ом.

4.5.1 До затискачів $1 - 1'$ кола рис. 4.24, а та б підведемо напругу $U_1 = 72$ в. За якої величини опору r_2, під'єднаному до затискачів $2 - 2'$, в ньому ви-

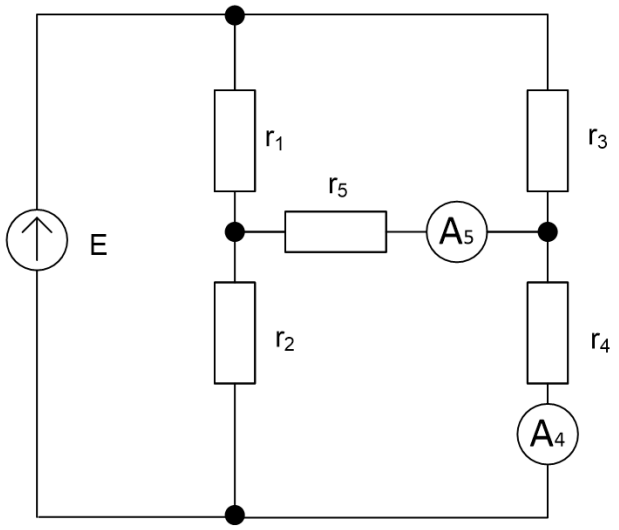

Рис. 4.22

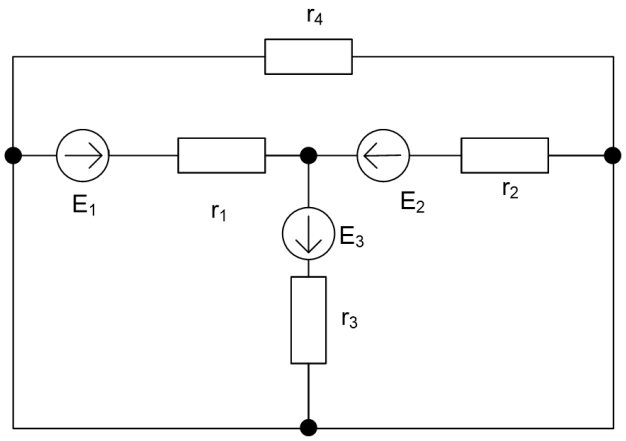

Рис. 4.23

ділиться максимальна потужність і чому вона рівна? Знайти відношення потужностей, яка використовується в опорі r_2 до тої, яка надається джерелом. Знайти коефіцієнт передачі, тобто відношення напруги на r_2 до підведеної.

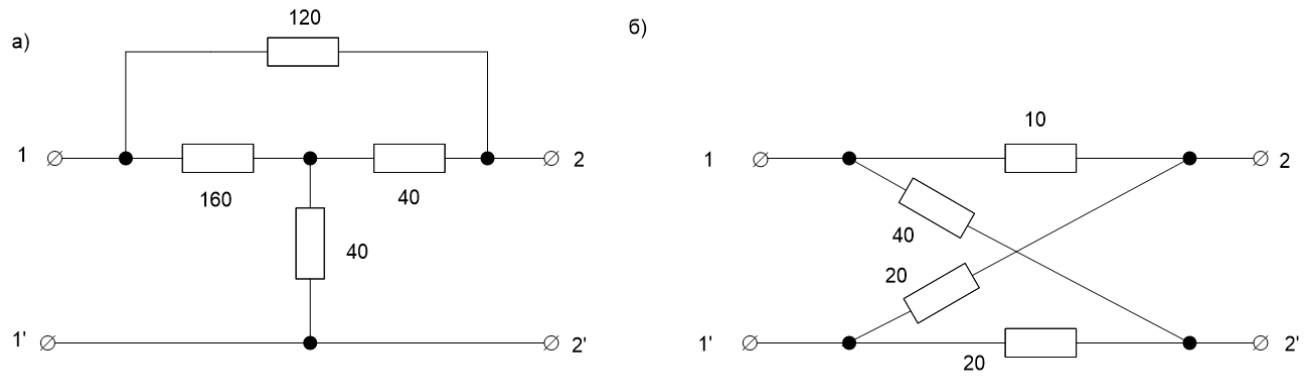

Рис. 4.24

5 Рекомендована література

1. Левитський С.М. Теорія радіотехнічних кіл. — Київ, 2012. — 152 с.
2. Зернов Н.В., Карпов В.Г., Теория радиотехнических цепей. — Л.: Энергия, 1972. — 816 с.
3. Байраченко І.В. Радіотехнічні кола та сигнали. — К.: ВПЦ Київський університет, 1992. — 233 с.
4. Пономаренко В.К. Пособие к практическим занятиям по теории электротехнических цепей. — О.: ОТИ МИФИ, 2001. — 200 с.
5. Прянишников В.А., Петров Е.А., Осипов Ю.М. Элетротехника и ТОЭ в примерах и задачах. — СПб.: КОРОНА-Век, 2007 — 336 с.
6. Шебес М.Р., Каблукова М.В., Задачник по теории электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1990. — 544 с.

Четверіков Іван Олександрович
Куцик Андрій Михайлович

Теорія електричних кіл в прикладах і задачах. Частина I. Лінійні електричні кола постійного струму

Навчально-методичний посібник для студентів радіофізичних спеціальностей