Косинский Ю.И.

Некоторые свойства барометрических соотношений

Первое, что можно отметить, исследуя барометрические соотношения (31), это то, что существует (или может существовать) бесконечное множество соотношений в зависимости от параметра γ. Для атмосферы Земли он равен ≈ 5. Верхний предел его – бесконечность, при этом формулы (31) совпадают с формулами Больцмана. Нижний предел γ из гидростатического вывода выяснить невозможно. Мы уже упоминали, что нами найден еще один подход к выводу барометрических соотношений. Его тоже можно назвать гидростатическим, но он более подробен в физическом понимании процессов, происходящих с газом в поле потенциальных сил. Из этого вывода выясняется, что нижний предел γ равен $\frac{5}{2}$.

Воспользовавшись найденным распределением

$$n(h)=n_0\left(1-\frac{1}{\gamma}\frac{n_0}{p_0}mgh\right)^{\gamma-1},$$

найдем, сколько частиц N имеет столб газа площадью S и высотой h_k,

$h_k=z_{гран}=\frac{\gamma p_0}{n_0 mg}$- верхняя граница открытой термодинамической системы, размер или конечная высота системы.

$$N=S\int_0^{h_k}n(h)\cdot dh=Sn_0\int_0^{h_k}\left(1-\frac{1}{\gamma}\frac{n_0}{p_0}mgh\right)^{\gamma-1}dh,$$

$$N=Sn_0\int_0^{h_k}\left(1-\frac{h}{h_k}\right)^{\gamma-1}dh. \tag{34}$$

Здесь необходимо решить интеграл вида:

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha x)^{\beta}dx=\frac{1}{\alpha(\beta+1)}. \tag{35}$$

Воспользовавшись результатом взятого интеграла, найдем:

$$N=Sn_0\frac{1}{\frac{1}{\gamma}\frac{n_0}{p_0}mg(\gamma-1+1)}=\frac{Sp_0}{mg}. \tag{36}$$

Т.е. количество частиц в столбе газа не зависит от вида барометрического распределения концентрации.

Найдем среднее значение кинетической энергии, приходящейся на одну частицу, усредненной по всему столбу газа.

$$\overline{\overline{E}}=\frac{1}{N}S\int_0^{h_k}n(h)\overline{E}(h)dh=\frac{mg}{p_0}\overline{E}_0 n_0\int_0^{h_k}\left(1-\frac{h}{h_k}\right)^{\gamma}dh=$$

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}_0 \frac{mg}{p_0} \frac{n_0}{\frac{1}{\gamma}\frac{n_0}{p_0} mg(\gamma+1)} = \overline{E}_0 \frac{\gamma}{\gamma+1}. \qquad (37)$$

Напомним, что $\overline{E}_0$- средняя кинетическая энергия у основания термодинамической системы. Энергия, усредненная по высоте столба, в общем случае всегда меньше или равна этой энергии.

Кинетическая энергия столба газа равна:

$$\overline{T} = N\overline{\overline{E}} = N\overline{E}_0 \frac{\gamma}{\gamma+1}. \qquad (38)$$

На одну степень свободы, соответственно:

$$\overline{T}_z = \frac{1}{3} N\overline{E}_0 \frac{\gamma}{\gamma+1}. \qquad (39)$$

Найдем потенциальную энергию системы.

$$\overline{U}_z = S\int_0^{h_k} n(h) mgh\, dh = Smgn_0 \int_0^{h_k} \left(1 - \frac{h}{h_k}\right)^{\gamma-1} h\, dh.$$

Интеграл будем решать по частям.

$$\int_0^{h_k} \left(1 - \frac{h}{h_k}\right)^{\gamma-1} h\, dh = \frac{h_k}{\gamma} \frac{h_k}{\gamma+1}. \qquad (35A)$$

Здесь мы дважды воспользовались результатом решения интеграла (35). Подставим найденное значение интеграла.

$$\overline{U}_z = \frac{Sp_0}{mg} \frac{(mg)^2}{p_0} n_0 \frac{\gamma^2}{\gamma\left(\frac{n_0}{p_0} mg\right)^2 (\gamma+1)} = N \frac{p_0}{n_0} \frac{\gamma}{\gamma+1} =$$

$$\overline{U}_z = N \frac{2}{3} \overline{E}_0 \frac{\gamma}{\gamma+1}. \qquad (40)$$

Мы пршли к выводу, что любое барометрическое распределение (при любом γ) удовлетворяет, найденному нами ранее, соотношению между потенциальной и кинетической энергией.

$$\overline{U}_z = 2\overline{T}_z. \qquad (41)$$

Т.е. роль поршня, сдерживающего газ в определенном объеме, в открытой системе играют сами частицы газа, находящиеся в поле потенциальных сил. Функция, которая стоит под интегралом

$$\overline{U}_z = \int_0^{h_k} Sn(h) mgh\, dh, \qquad (42)$$

есть не что иное, как спектральная составляющая энергетического спектра потенциальной энергии.