

## Барометрическая формула

Приведем чисто гидростатический вывод распределения Больцмана, где в нем мы по существу будем отвлекаться от молекулярной структуры газа, рассматривая ее как сплошную среду. Это допустимо для достаточно плотных слоев газа при наличии большого числа столкновений. В отсутствие внешних сил средняя концентрация молекул газа  $n$  в состоянии равновесия всюду одинакова. Но этого не будет при наличии силовых полей. Нижние слои сдавлены весом столба газа, расположенного над ними. С увеличением высоты вес этого столба уменьшается, что сопровождается уменьшением плотности газа и давления.

Кратко приведем известный вывод барометрической формулы. Выделим мысленно бесконечно короткий вертикальный столб газа высотой  $dz$ . Пусть площадь основания равна единице. Вес столба  $nmg \cdot dz$  должен уравновешиваться разностью давлений. Это приводит к соотношению:

$$\frac{dp}{dz} = -nmg,$$

$n$  - число частиц газа в единице объема,

$m$  - масса одной частицы.

Подставляя сюда  $p = nkT$  и принимая во внимание, что температура  $T$  одинакова на всех высотах, получим:

$$kT \frac{dn}{dz} - nmg \text{ или}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{mg}{kT} p.$$

Разделим переменные полученного дифференциального уравнения:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dz.$$

Решение уравнения дает:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT} z\right), \\ n &= n_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT} z\right). \end{aligned} \tag{1}$$

На любой высоте давление, концентрация и температура удовлетворяют уравнению состояния

$$p = nkT$$

поэтому можно считать формулы соответствуют равновесному состоянию газа.

Общеизвестно, что в атмосфере планет наблюдается понижение температуры с высотой, что находится в полном противоречии с требованием постоянства температуры в равновесном столбе газа. Этот, а

также ряд других фактов, например, постоянство состава атмосферы с высотой, показывают (общепринятое мнение), что атмосфера не находится в состоянии статистического равновесия.

Допустим, несмотря на понижение температуры с высотой, что атмосфера Земли все же находится в состоянии равновесия. Выведем формулы для плотности (концентрации) газа и давления, учитывая градиент температур.

$$T = T_0(1 - \beta \cdot z) \quad (2)$$

$T_0$  - температура Земли,

$\beta$  - коэффициент, учитывающий изменение температуры с высотой.

Используя гидростатический вывод, найдем дифференциальное уравнение.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT_0(1 - \beta \cdot z)} dz \quad (3)$$

Решение:

$$d \cdot \ln p = \frac{mg}{\beta \cdot kT_0} d \cdot \ln(1 - \beta \cdot z),$$

$$d \cdot \ln p = d \cdot \ln(1 - \beta \cdot z)^{\frac{mg}{\beta \cdot kT_0}},$$

$$p = p_0(1 - \beta \cdot z)^{\frac{mg}{\beta \cdot kT_0}}.$$

Сделаем пере обозначение

$$\frac{mg}{\beta \cdot kT_0} = \gamma, \quad kT_0 = \frac{2}{3} \overline{E_0}, \quad p_0 = \frac{2}{3} n_0 \overline{E_0}.$$

Выпишем полученный результат

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{n_0}{p_0} mgz \right)^\gamma, \\ n(z) &= n_0 \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{n_0}{p_0} mgz \right)^{\gamma-1}, \\ \overline{E}(z) &= \overline{E_0} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{n_0}{p_0} mgz \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Полученные соотношения для давления, концентрации и средней кинетической энергии, приходящейся на одну частицу газа атмосферы, удовлетворяют основному уравнению состояния газа:

$$p = \frac{2}{3} nE.$$

Т.е. полученные результаты удовлетворяют равновесной системе.

Понижение температуры с высотой характеризуется градиентом  $\approx 6 \frac{\text{град}}{\text{км}}$ . Если рассматривать идеальный случай, когда агрегатное состояние газа атмосферы не будет изменяться с понижением температуры, то формулы (4) показывают, что должна существовать граница атмосферы. Это та высота, где давление, концентрация и температура принимают нулевое значение. По

данным ракетных исследований (взятых из справочника [1]) для температуры, давления и концентрации газа для различных высот нетрудно определить, что воображаемая граница находится в районе 43 км. Из условия, что

$$1 - \frac{1}{\gamma} \frac{n_0}{p_0} mgz_{гран} = 0$$

определим параметр атмосферы  $\gamma$

$$\gamma = \frac{n_0}{p_0} mgz_{гран} \quad (5)$$

$n_0 mg$  - удельный вес атмосферы на нулевой высоте

$$n_0 mg = 1.225 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^3},$$

$p_0$  - давление газа у Земли на нулевой отметке

$$p_0 = 1.033515 \cdot 10^4 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}^2}$$

Подставив все значения, найдем, что

$$\gamma = 5.096684. \quad (6)$$

Теоретические кривые (4) с найденными значениями  $\gamma$  вычерчены на графике. Экспериментальные данные ракетных исследований проставлены черными точками [1]. На высотах до 10 км совпадение можно назвать идеальным. Начиная с 10 км вступает в силу поглощение газом солнечной энергии, что увеличивает температуру газа настолько, что градиент температуры меняет свой знак на обратный. Повышение температуры газа увеличивает давление. Так как термодинамическая система атмосферы является открытой со стороны космоса, то введенная нами воображаемая граница отодвигается в сторону больших высот за счет увеличения давления и падения концентрации газа в этой области. В районе воображаемой границы атмосферы концентрация газа увеличивается.

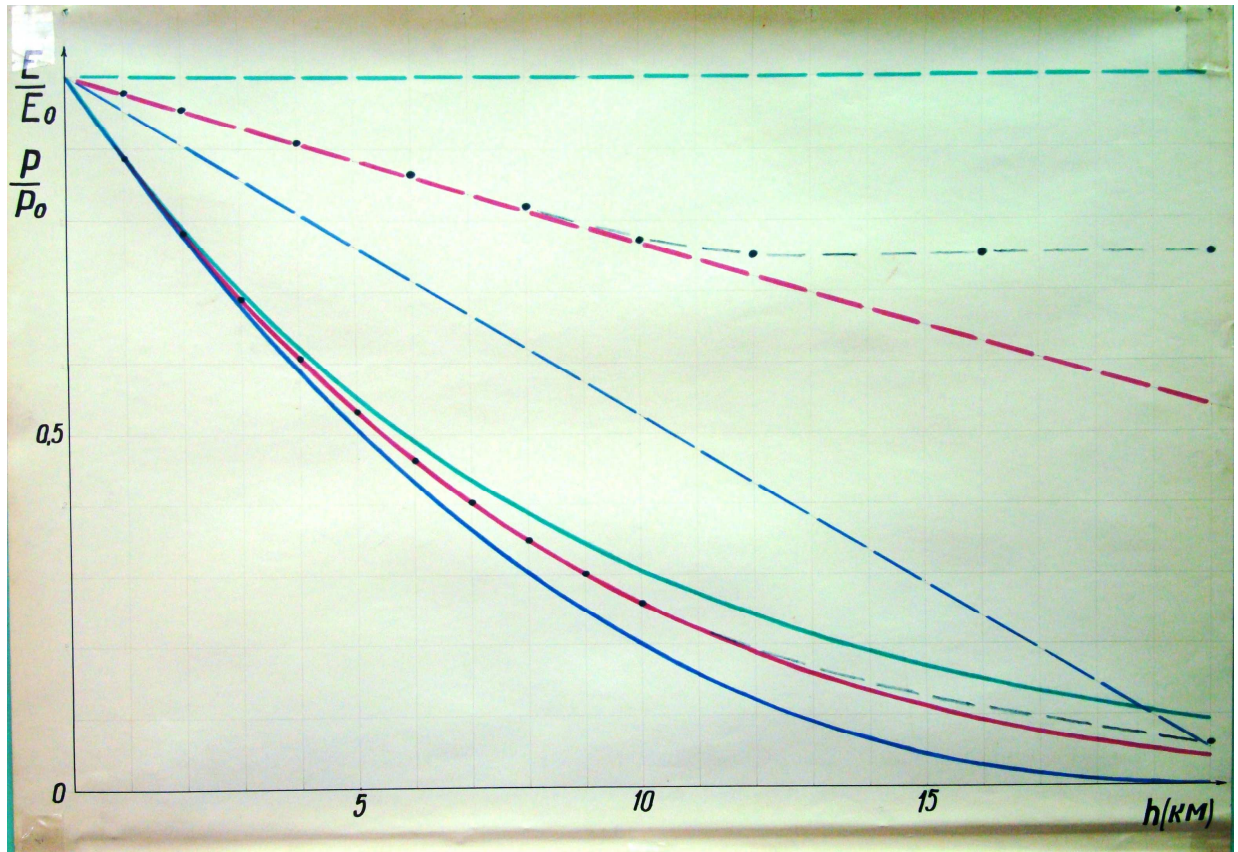
Для сравнения на графиках вычерчены кривые давления и плотности Больцмановского распределения. Отклонения экспериментальных данных от теоретических нельзя объяснить с помощью простых физических соображений.

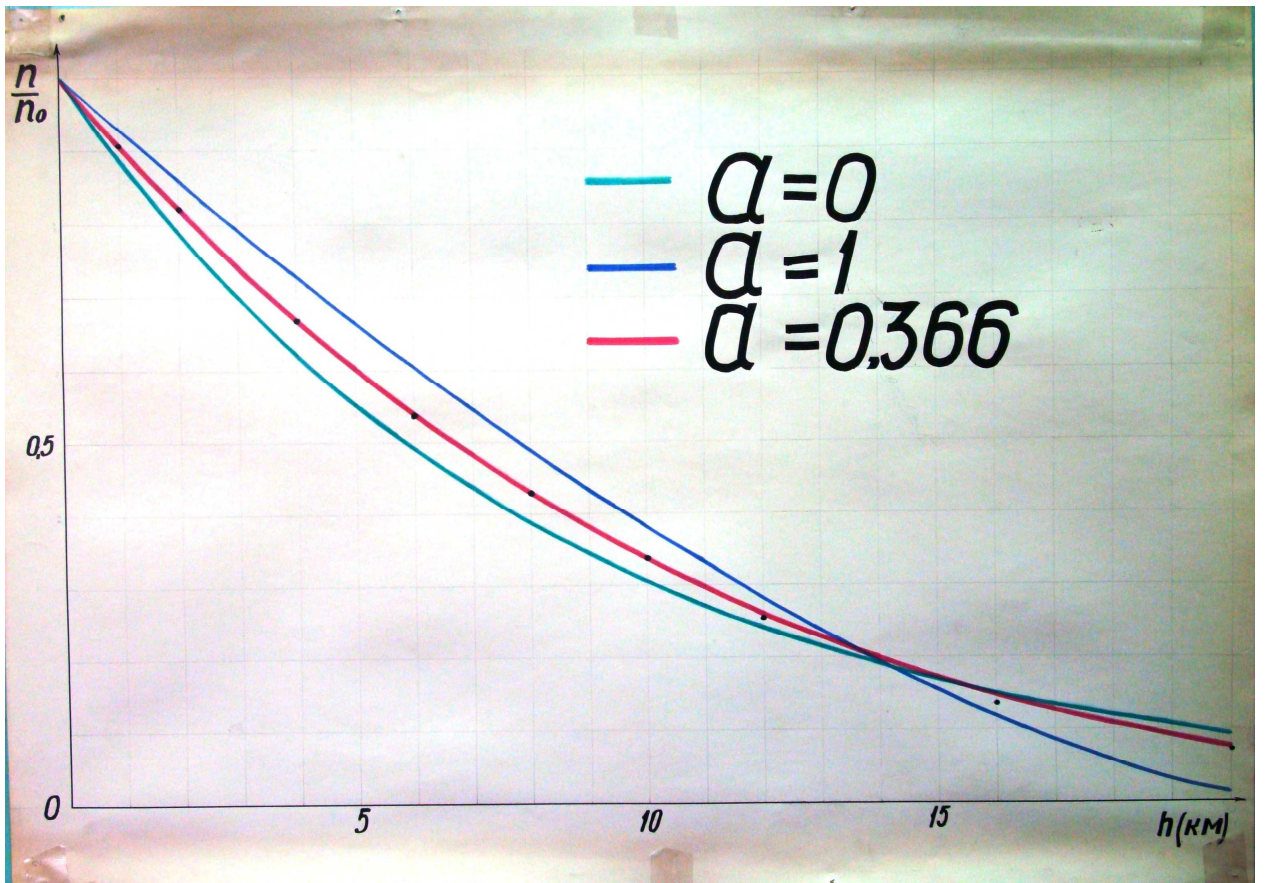
Таким образом теоретические формулы, полученные для равновесной системы (4), полностью совпадают с экспериментальными данными. Атмосфера – система равновесная. Остается только выяснить причину возникновения отрицательного градиента температур в поле потенциальных сил. Причина кроется в распределении атомов по скоростям. Мы это выясним позже.

И так можно сделать вывод, что для газа, находящегося в поле потенциальных сил и находящегося в состоянии статистического равновесия, возможен отрицательный градиент температур. Если этот газ нагревать со стороны менее нагретого конца, то энергия будет перетекать от менее нагретой части к более нагретой. Сама природа поставила нам этот

эксперимент. Отрицательный градиент температур, переходящий в положительный, имеют атмосферы всех планет (там, где есть атмосфера).

Верхние слои атмосферы Земли, имея более низкую температуру, поглощают солнечную энергию (вероятно, благодаря малой концентрации) и передают эту поглощенную энергию посредством теплопроводности более нагретой Земле.





Литература

1. Кучеренко Е.Т. Справочник по физическим основам вакуумной техники. Киев, Вища школа, 1981 р.