Косинский Ю.И.

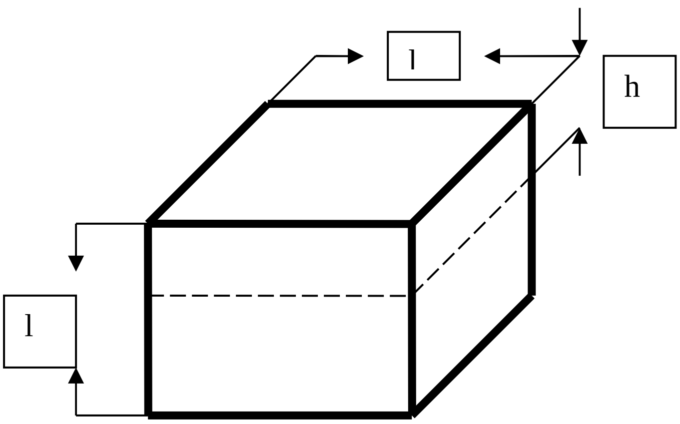
Распределение приращений потенциальной и кинетической энергий при адиабатическом сжатии термодинамической системы

Пусть мы имеем термодинамическую систему с параметрами

$$p_0, \quad E_0, \quad n_0, \quad V_0$$

Геометрическую форму системы, для простоты, выберем в виде куба с длиной грани l, Произведем адиабатическое сжатие системы вдоль одной степени свободы. При этом параметры системы изменятся.

$$p_0 \to p$$
$$T_0 = NE_0 \to T = NE$$
$$V_0 \to V$$
$$n_0 \to n$$



Куб после сжатия становится параллелепипедом с высотой $l-h$.

T - кинетическая энергия системы.

E - кинетическая энергия, в среднем приходящаяся на одну частицу.

Закон адиабатического сжатия на одну степень свободы таков:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\frac{5}{3}}, \qquad \frac{NE}{NE_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{5}}. \tag{1}$$

Изменение полной энергии системы равно:

$$\Delta E = \int_{p_0}^{p} V \cdot dp = V_0 \int_{p_0}^{p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{3}{5}} dp =$$

$$= \frac{V_0}{p_0^{-\frac{3}{5}}} \frac{5}{3} p^{\frac{2}{5}} \Big|_{p_0}^{p} = \frac{5}{2} p_0 V_0 \left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{5}} - 1 \right). \tag{2}$$

При вычислении ΔE мы воспользовались первой формулой (1). Используя вторую формулу (1) и уравнение состояния

$$p_0 V_0 = \frac{2}{3} N E_0 \qquad (3)$$

из (2) получим:

$$\Delta E = \frac{5}{3}(T - T_0), \qquad (2^A)$$

т.е. изменение кинетической энергии газа составляет $\frac{3}{5}$ изменения полной энергии газа, или той потенциальной энергии, которая была заимствована из внешнего источника потенциальных сил, и с помощью которой был осуществлен процесс адиабатического сжатия.

$$T - T_0 = \frac{3}{5}\Delta E = \frac{3}{5}(E - E_0) = \frac{3}{5} U_{вн ш} \qquad (4)$$

Оставшиеся $\frac{2}{5}\Delta E$, соответственно, увеличило потенциальную энергию вдоль оси сжатия z.

$$\Delta U_z = \frac{2}{5}\Delta E = 2(T - T_0)_z \qquad (5)$$

Мы рассмотрели процесс адиабатического сжатия для одной степени свободы, т.е. изменение объема происходит за счет изменения координат поверхности, ограничивающей объем, вдоль оси z. Поверхности, расположенные на осях x и y, при этом не изменяют свои координаты. Чтобы сохранить эти поверхности неподвижными в процессе сжатия, необходимо также затратить энергию (потенциальную, которая автоматически заимствуется из жесткости стенок боковой поверхности куба). Согласно общему правилу, найденному для каждой степени свободы, эта энергия должна быть равна:

$$\Delta U_x + \Delta U_y = 2(T - T_0)_x + 2(T - T_0)_y = \frac{4}{5}\Delta E \qquad (6)$$

Учитывая эту дополнительную потенциальную энергию (6), найдем всю энергию, которую имеет термодинамическая система после сжатия.

$$\overline{\Delta E} = \Delta E(1 + \frac{4}{5}) = \frac{9}{5}\Delta E \qquad (7)$$

Убедимся непосредственно, что найденные соотношения верны.

$$\Delta U_z = \frac{2}{5}\Delta E = p \cdot l^2 (l - h) - p_0 l^3$$

Изменение потенциальной энергии вдоль осей x и y состоит из двух слагаемых:

1. приращения на оставшейся поверхности (боковой),

$$2(p - p_0) \cdot l^2 (l - h)$$

2. приращения на исчезнувшей поверхности,

$$-2 p_0 l^2 h.$$

В итоге получим:

$$\Delta U_x + \Delta U_y = 2(p - p_0) \cdot l^2 (l - h) - 2 p_0 l^2 h = 2 p \cdot l^2 (l - h) - 2 p_0 l^3 ,$$

что изменение потенциальной энергии степеней свободы, не участвующих в изменении объема, удовлетворяют соотношению (6).

Именно это приращение потенциальной энергии ”замороженных” степеней свободы было заимствовано из потенциальных запасов прочности стенок куба. В процессе сжатия это происходит автоматически до тех пор, пока приращения не превосходят запасы потенциальной энергии прочности стенок. В противном случае происходит разрушение стенок.