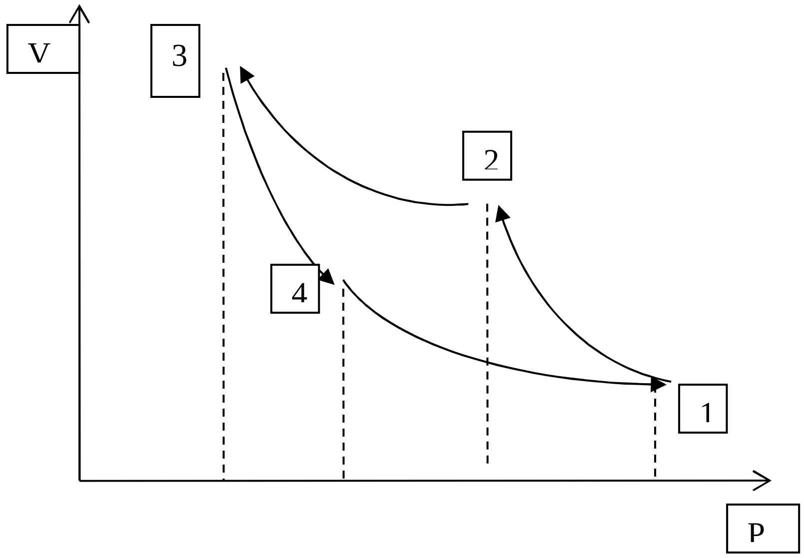
Косинский Ю.И.

Цикл Карно (вывод из принципа полной энергии)

Продолжение статьи ”Вывод уравнения адиабаты термодинамической системы”.



Состояние системы будем изображать точкой на диаграмме p, V.

$1 \to p_1 V_1, \quad 2 \to p_2 V_2, \quad 3 \to p_3 V_3, \quad 4 \to p_4 V_4.$

Начальное состояние системы $\to p_1 V_1$. Система, имея среднюю кинетическую энергию E_1, приводится в тепловой контакт с термостатом, имеющим ту же энергию E_1 или температуру t_1. Затем бесконечно медленно уменьшаем внешнее давление и заставляем систему квазистатически расширяться по изотерме $1 \to 2$.

Совершаемая при этом работа равна:

$$A_1 = -\int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp \tag{31}$$

Уравнение состояния для этого случая:

$$V = \frac{2}{3}\frac{1}{p} N E_1 \tag{32}$$

Подставим найденный объем в уравнение (31).

$$A_1 = -\frac{2}{3} N \cdot E_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{2}{3} N \cdot E_1 \ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{3} N \cdot E_1 \ln\frac{p_1}{p_2} \tag{33}$$

Из состояния 2 заставим систему расширяться квазистатически по адиабате $2 \to 3$ (без контакта с термостатом).

Совершаемая при этом работа равна:

$$A_2 = -\int_{p_2}^{p_3} V \cdot dp \tag{34}$$

Соотношения между объемом и давлением найдем из уравнения (27).

$$\frac{p}{p_3} = \left(\frac{V}{V_2}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \quad \text{или} \quad \frac{V}{V_2} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{-\gamma}, \qquad V = V_2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{-\gamma} \tag{35}$$

Подставим найденный объем в уравнение (34).

$$A_2 = -V_2 \cdot p_2 \int_{p_2}^{p_3} p^{-\gamma} dp = \frac{1}{1-\gamma} V_2 \cdot p_2^{\gamma}\left(p_2^{1-\gamma} - p_3^{1-\gamma}\right) = \frac{1}{1-\gamma}\, p_2 V_2 \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-\gamma}\right] \tag{36}$$

Множитель $p_2 V_2$ найдем из уравнения состояния.

$$p_2 V_2 = \frac{2}{3} N \cdot E_1$$

Множитель в квадратных скобках найдем из уравнения адиабаты (29^A).

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1-\gamma}$$

Сделав соответствующие замены в (36), получим:

$$A_2 = \frac{1}{1-\gamma}\frac{2}{3} N E_1 \left[1 - \frac{E_2}{E_1}\right] = \frac{1}{1-\gamma}\frac{2}{3} N (E_1 - E_2) \tag{37}$$

Из точки 3 систему заставим двигаться по изотерме с кинетической энергией E_2 (сжатие).

$$A_3 = -\int_{p_3}^{p_4} V \cdot dp \tag{38}$$

Объем найдем из уравнения состояния.

$$V = \frac{1}{p}\frac{2}{3} N \cdot E_2$$

Подставив найденный объем в (38), найдем затраченную энергию на сжатие:

$$A_3 = \frac{2}{3} N \cdot E_2 \ln\frac{p_3}{p_4} \tag{39}$$

Из точки 4 систему заставим двигаться по адиабате (сжатие) в точку 1, т.е. в исходное состояние.

Затраченная при этом работа равна:

$$A_4 = -\int_{p_4}^{p_1} V \cdot dp$$

Соотношение между объемом и давлением равно:

$$V = V_4\left(\frac{p}{p_4}\right)^{-\gamma}$$

Затраченная работа равна:

$$A_4 = \frac{1}{1-\gamma} p_4 V_4 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_4} \right)^{1-\gamma} \right]$$

С помощью замен:

$$p_4 V_4 = \frac{2}{3} N \cdot E_2,$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{p_1}{p_4} \right)^{1-\gamma}$$

Получим:

$$A_4 = \frac{1}{1-\gamma} \frac{2}{3} N \cdot E_2 \left[1 - \frac{E_1}{E_2} \right] = \frac{1}{1-\gamma} \frac{2}{3} N (E_2 - E_1) \qquad (40)$$

В результате совершения полного цикла на отдельных участках были произведены следующие работы:

$$A_1 = \frac{2}{3} N \cdot E_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$A_2 = \frac{1}{1-\gamma} \frac{2}{3} N (E_1 - E_2) \qquad (41)$$

$$A_3 = \frac{2}{3} N \cdot E_2 \ln \frac{p_3}{p_4}$$

$$A_4 = \frac{1}{1-\gamma} \frac{2}{3} N (E_2 - E_1)$$

При этом оказывается, что работы, совершаемые системой при адиабатических процессах равны и противоположны по знаку.

$$A_2 = -A_4$$

Соотношение между $\frac{p_1}{p_2}$ и $\frac{p_3}{p_4}$ найдем из уравнений адиабат прямого и обратного процессов:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{1-\gamma} \quad \text{и} \quad \frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{p_1}{p_4} \right)^{1-\gamma}$$

Исключим кинетическую энергию

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{p_1}{p_4} \quad \text{или} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_4}{p_3} \qquad (42)$$

Совершаемая работа за цикл термодинамической системы равна:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

Учитывая (42), она равна:

$$A = \frac{2}{3} N (E_1 - E_2) \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad (43)$$

Соотношение (43) указывает, какое количество кинетической энергии было превращено в потенциальную энергию, т.е. превращено в работу. В работу была превращена только часть кинетической энергии, которая была отобрана у термостата с более высокой энергией E_1 и равна A_1.

Коэффициент полезного действия равен отношению полученной потенциальной энергии к затраченной кинетической энергии и равен:

$$\eta = \frac{A}{A_1} = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$$

и не зависит от количества степеней свободы, участвующих в адиабатическом процессе.