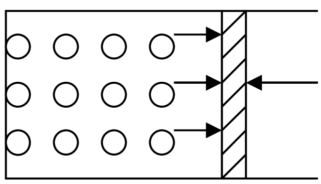
Косинский Ю.И.

Вывод основных соотношений между потенциальной и кинетической энергией термодинамической системы

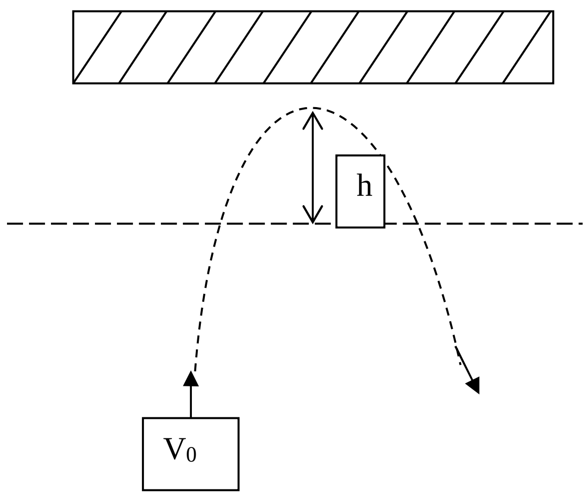
Основные соотношения статистической физики были получены при теоретическом исследовании взаимодействия между макроскопической системой и термостатом (метод Гиббса). При этом под макроскопическими понимались системы, построенные из большого числа частиц, которые в случае идеального газа обладают только кинетической энергией поступательного движения. Материальные тела и силы, ограничивающие движение частиц газа и объем исследуемых систем, в определение макроскопических систем не входят. В теории этим факторам отведена второстепенная роль или термостата или внешних параметров.

В действительности, газ в стационарном состоянии не может существовать без сосуда, в котором он находится, и без поршня с его потенциальной энергией, который удерживает газ в определенном объеме. Поэтому представляет несомненный интерес найти энергетические соотношения такой термодинамической системы газового состояния.

Термодинамическая система



Фрагмент взаимодействия частиц с поршнем



$v_x(t)$ - скорость частицы в зоне взаимодействия частицы с поршнем.

$$v_x(t) = v_x - a \cdot t$$

a - ускорение действующее на частицу в зоне взаимодействия.

h - длина проникновения частицы в зону взаимодействия.

$2t_h$ - время нахождения частицы в зоне взаимодействия.

$$t_h = \frac{v_x}{a}, \qquad h = v_x \cdot t_h - \frac{a \cdot t_h^2}{2} = \frac{v_x^2}{2a}.$$

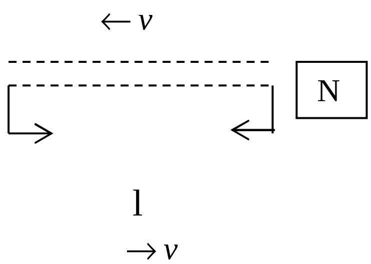
Будем считать, что частицы, обладающие определенной скоростью v, распределены равномерно по объему термодинамической системы с плотностью Δn_v, где

$$\Delta n_v = \Delta\rho_l \cdot \Delta\rho_s$$

$\Delta\rho_l$ - линейная плотность частиц со скоростью v,

$\Delta\rho_s$ - поверхностная плотность.

$$\Delta\rho_l = \frac{N_1}{l}, \qquad \Delta\rho_s = \frac{N_1^{\;2}}{s}.$$



$$N_{1\rightarrow} = N_{1\leftarrow} = \frac{N_1}{2}$$

Δt - интервал времени, через которое частицы, обладающие скоростью v, влетают в зону взаимодействия (для одной траектории).

$$\Delta t = \frac{l}{N_1/2 \cdot v_x} = \frac{2}{\Delta\rho_l \cdot v_x},$$

A_l - количество частиц, одного сорта v, которые находятся в зоне взаимодействия (для одной траектории).

$$A_l = \frac{2t_h}{\Delta t} = \frac{\Delta\rho_l \cdot v_x^2}{a}$$

A_{lS} - количество частиц, имеющие скорость v, которые находятся в зоне взаимодействия по всей площади поршня.

S - площадь поршня.

$$A_{lS} = A_l \cdot \Delta\rho_s \cdot S = \frac{v_x^2}{a}\Delta n_v \cdot S$$

Поршень и частицы, которые находятся в зоне взаимодействия, отталкиваются друг от друга с силой ΔF_v, где

$$\Delta F_v = A_{lS} \cdot m \cdot a = m \cdot v_x^2 \cdot \Delta n_v \cdot S$$

При этом частицы оказывают давление Δp

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} = m \cdot v_x^2 \cdot \Delta n_v$$

Δn_v - плотность атомов, имеющие скорость v в интервале dv_x, dv_y, dv_z.

$$\Delta n_v = C \cdot f(v^2) \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z = C \cdot f(v^2) \cdot v^2 \cdot dv \cdot Sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

С определим из условия формировки:

$$n_0 = \iiint \Delta n_v = C \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} Sin(\theta) \cdot d\theta \cdot \int_0^{\infty} f(v^2) \cdot v^2 \cdot dv = C \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 1$$

$$C = \frac{n_0}{4\pi},$$

таким образом:

$$\Delta n_v = \frac{n_0}{4\pi} f(v^2) \cdot v^2 \cdot dv \cdot Sin(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi.$$

Про суммируем вклады от всех ансамблей.

$$p = \iiint \Delta p, \qquad v_x = v \cdot Cos(\theta)$$

$$p = \frac{2 \cdot m \cdot n_0}{4 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} Cos^2(\theta) \cdot Sin(\theta) \cdot d\theta \int_0^{\infty} v^2 f(v^2) \cdot v^2 dv$$

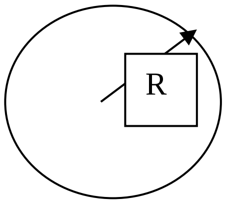
$$p = \frac{2}{3} n_0 \int_0^{\infty} \frac{m \cdot v^2}{2} f(v^2) \cdot v^2 dv = \frac{2}{3} n_0 E,$$

где E - средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу.

F - суммарная сила, распределенная по поверхности термодинамической системы, которая удерживает атомы в локальном объеме V .

$$F = p \cdot S = n_0 \cdot E \frac{2}{3} S$$

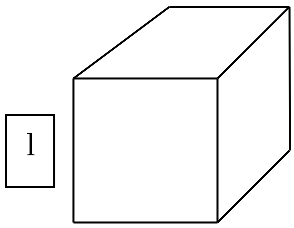
для сферы



$$S = 4\pi R^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$F = 2n_0 E(\frac{4}{3}\pi R^3)\frac{1}{R} = 2n_0 EV \frac{1}{R}$$

для куба



$$S = 6l^2 \qquad V = l^3$$

$$F = 2n_0 E(l^3)\frac{1}{l/2} = 2n_0 EV \frac{1}{l/2}$$

Для этих случаев потенциальная энергия U поверхностных сил равна

$$U = FR = F\, l/2 = 2n_0 VE = 2NE$$

где $N = n_0 V$ - количество атомов в термодинамической системе.

Подсчитаем потенциальную энергию поверхностных сил для термодинамической системы произвольной формы.

$$dF = \frac{2}{3} n_0 E \cdot dS$$

$$U = \iint d\vec{F} \cdot \vec{R} = \frac{2}{3} n_0 E \iint \vec{R}\, d\vec{S} = \frac{2}{3} n_0 E \iint_S (R_x dS_x + R_y dS_y + R_z dS_z)$$

$$U = \frac{2}{3} n_0 E \iint_S (x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dz \cdot dx + z \cdot dx \cdot dy) = \frac{2}{3} n_0 E \cdot 3V = 2NE$$

Таким образом доказано, что для термодинамической системы произвольной формы справедливо соотношение:

$$E_{пот} = 2E_{кин} \tag{1}$$

где $E_{пот} = \int \vec{R} \cdot d\vec{F} = FR = F\, l/2$

$E_{кин} = N \cdot E$

Полученный результат можно записать в известной форме:

$$p = \frac{2}{3} n_0 E,$$

умножив на V, получим

$$pV = \frac{2}{3} NE \tag{2}$$

Согласно (1),термодинамическая система состоит из потенциальной и кинетической энергий, между которыми существуют определенные соотношения (1).

Потенциальная энергия поверхности противостоит кинетической энергии частиц газа и удерживает их в определенном объеме.

Полная энергия термодинамической системы $E_{полн}$ равна их сумме:

$$E_{полн} = E_{пот} + E_{кин} \tag{3}$$

Подставив (1) в (3), получим:

$$E_{полн} = 3E_{кин} \tag{4}$$

$$E_{полн} = \frac{3}{2} E_{пот} \tag{5}$$

или

$$E_{пот} = \frac{2}{3} E_{полн} \tag{6}$$

Соотношения (1), (6) известны в механике. Их дает вириальная теорема для частного случая, когда частицы находятся в поле потенциальных сил, энергия которых пропорциональна первой степени координаты. Соотношение записывается в таком виде:

$$\overline{U} = 2\overline{T} \tag{7}$$

где $\overline{U}$ – потенциальная энергия,

$\overline{T}$ – кинетическая энергия.

Черта обозначает усреднение по времени.

Эта теорема указывает на то, что полная энергия системы равна:

$$\overline{\mathrm{E}} = \overline{U} + \overline{T},$$

откуда можно получить:

$$\overline{U} = \frac{2}{3}\overline{\mathrm{E}}, \qquad \overline{T} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{E}}. \tag{8}$$

Соотношения (1) и (6) совпадают с известными (7) и (8) соответственно.

Следует отметить, что соотношение (2) (известное в термодинамике), которое эквивалентно (1), по форме совпадает с (8), если ошибочно предположить, что:

$$\begin{aligned} pV &= E_{пот} = \overline{U} \\ NE &= E_{полн} = \overline{\mathrm{E}} \end{aligned} \qquad (9)$$

Именно эти предположения и были сделаны в термодинамике.

Соотношение (6) справедливо только для тех термодинамических систем, у которых поверхностные силы, удерживающие газ в определенном объеме, скомпенсированы силами сопротивления газа. При этом имеется в виду, что газ полностью окружен элементарными бесконечно маленькими подвижными поршнями, расположенными вплотную друг к другу. Примером может служить резиновый шар, наполненный газом при определенном давлении.