Косинский Ю.И.

Взаимодействие волны электрического поля с оптической средой в микроструктурной модели в случае падения волнового вектора на плоскость среды под углом, при этом вектор электрического поля находится в плоскости падения

В работе [1] была решена задача прохождения и отражения электрической волны сквозь оптическую среду в представлении микроструктурной модели взаимодействия. При этом волновой вектор падал под произвольным углом к плоскости среды, а электрический вектор находился перпендикулярно плоскости падения луча.

Интегральное уравнение для волн электрического поля, излучаемых диполями, находящимися в плоскости решетки структуры среды в случае падения возбуждающей волны электрического поля под углом α к плоскости среды имело такой вид.

$$E_l(z_l) = iA_\alpha E_0\,\ell^{ikCos(\alpha)z_l} + ik_\alpha{}'\,\ell^{-ikCos(\alpha)z_l}\int_{z_l}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ikCos(\alpha)z_j}dz_j +$$

$$+ik_\alpha{}'\,\ell^{ikCos(\alpha)z_l}\int_{z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{-ikCos(\alpha)z_j}dz_j, \tag{1}$$

где
$$k_\alpha{}' = -i\frac{\overline{\overline{r_\alpha}}}{\Delta z} = 2\pi\frac{k}{Cos(\alpha)}N_{xyz}\,\alpha\,. \tag{2}$$

Соответствующее интегральному уравнению (1) волновое уравнение для электрической волны, излучаемой плоскостью диполей, имело такую функциональную зависимость

$$\frac{d^2}{(dz)^2}E_l(z_l)+k^2Cos^2(\alpha)(1+2\frac{k_\alpha'}{kCos(\alpha)})E_l(z_l)=0, \qquad (3)$$

решение которого совместно с уравнением (1) дает следующую зависимость для амплитуд электрических волн, излучаемых плоскостями, в которых расположены диполи

$$E_l(z_l)=E_0\frac{ikCos(\alpha)\Delta z}{D_\alpha}*$$

$$*\left[(1-u_\alpha)\ell^{ikCos(\alpha)u_\alpha(L-z_l)}-(1+u_\alpha)\ell^{-ikCos(\alpha)u_\alpha(L-z_l)}\right].(4)$$

Для амплитуд суммарного (суммируются волны, излучаемые плоскими источниками переизлучения (4)) электрического поля волн двух направлений, распространяющихся в среде, в случае падения возбуждающей волны под углом α к плоскости среды, формулы имели следующую функциональную зависимость.

$$E_l^+=E_0\ell^{ikCos(\alpha)z_l}+\sum_{z_j=z_1}^{z_l}E_j(z_j)\ell^{ikCos(\alpha)(z_l-z_j)}, \qquad (5)$$

$$E_{l+1}^-=\sum_{z_j=z_{l+1}}^{z_p}E_j(z_j)\ell^{ikCos(\alpha)(z_j-z_{l+1})}, \qquad (6)$$

где значения амплитуд волн источников переизлучения $E_j(z_j)$ необходимо брать из формулы (4).

В данной работе будет решена задача прохождения и отражения электрической волны сквозь оптическую среду в представлении микроструктурной модели взаимодействия. При этом волновой вектор падает под произвольным углом к плоскости среды, а электрический вектор находится в плоскости падения луча.

Электрический вектор в плоскости падения на границе раздела сред при прохождении (Рис. 1) и отражении (Рис. 2) испытывает следующие преобразования.

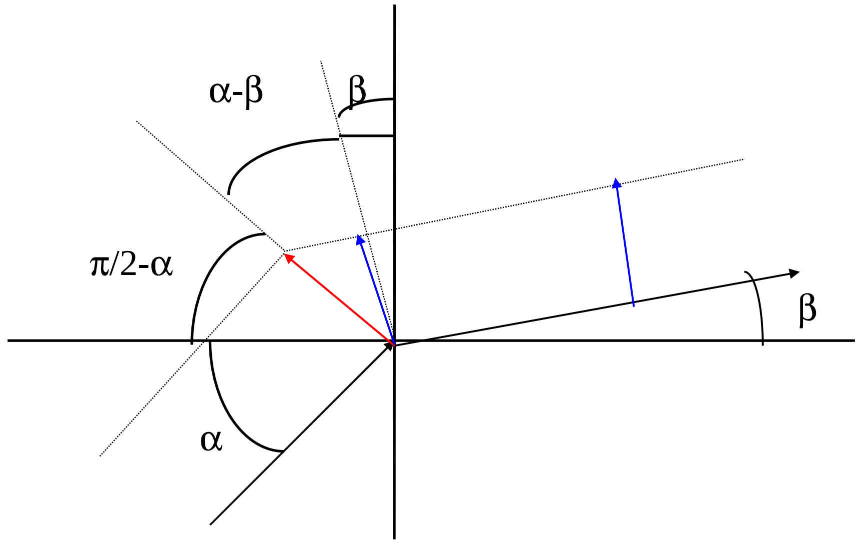

Рис.1

Согласно рис.1, электрический вектор падающей волны на входе в оптическую среду $\vec{E}_{\alpha}$ терпит преобразование, превращаясь в электрический вектор преломленной волны $\vec{E}_{\beta}$, согласно соотношению:

$$\left|\vec{E}_{\beta}\right| = \left|\vec{E}_{\alpha}\right| Cos(\alpha - \beta). \tag{7}$$

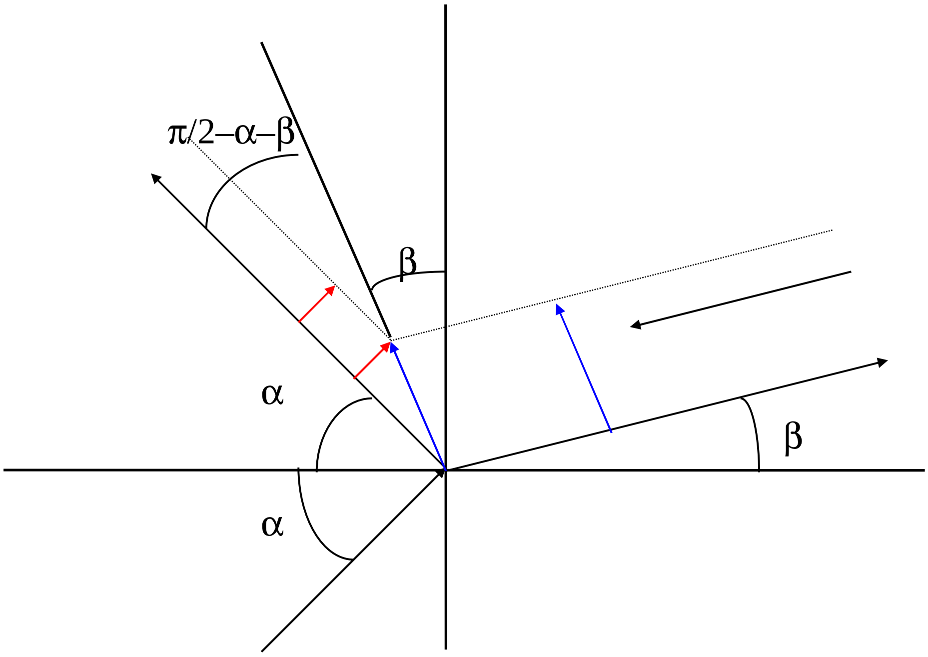

Рис.2

Согласно рис.2, электрический вектор преломленной волны на выходе из оптической среды, двигающийся в среде в обратном направлении $\overleftarrow{E}_{\beta}$ терпит преобразование, превращаясь в электрический вектор отраженной волны $\overleftarrow{E}_{\alpha}$, согласно соотношению:

$$\left|\overleftarrow{E}_{\alpha}\right| = \left|\overleftarrow{E}_{\beta}\right| Sin(\pi/2-\alpha-\beta) = \left|\overleftarrow{E}_{\beta}\right| Cos(\alpha+\beta). \qquad (8)$$

Если электрический вектор находится в плоскости падения луча, интегральное уравнение (1), (2) для волн электрического поля, излучаемых диполями, находящимися в плоскости решетки структуры среды в случае падения возбуждающей волны электрического поля под углом α к плоскости среды, учитывая соотношения (7), (8) будет иметь такой вид.

$$E_l(z_l) = iA_{\alpha}E_0\,\ell^{ikCos(\alpha)z_l} +$$

$$+iCos(\alpha+\beta)k'_{\alpha}\,\ell^{-ikCos(\alpha)z_l}\int_{z_l}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ikCos(\alpha)z_j}dz_j + \qquad (9)$$

$$+iCos(\alpha-\beta)k'_{\alpha}\,\ell^{ikCos(\alpha)z_l}\int_{z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{-ikCos(\alpha)z_j}dz_j,$$

где
$$k_{\alpha}' = -i\frac{\overline{\overline{r_{\alpha}}}}{\Delta z} = 2\pi\frac{k}{Cos(\alpha)}N_{xyz}\,\alpha. \qquad (10)$$

Для амплитуд суммарного (суммируются волны, излучаемые плоскими источниками переизлучения (4)) электрического поля волн двух направлений, распространяющихся в среде, в случае падения возбуждающей волны под углом α к плоскости среды, формулы будут иметь следующую функциональную зависимость.

$$E_l^{+} = E_0 \ell^{i\,kCos(\alpha)\,z_l} +$$

$$Cos(\alpha-\beta)\sum_{z_j=z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{\,i\,kCos(\alpha)\,(z_l-z_j)}, \qquad (11)$$

$$E_{l+1}^{-} = Cos(\alpha+\beta)\sum_{z_j=z_{l+1}}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{\,i\,kCos(\alpha)\,(z_j-z_{l+1})}, \qquad (12)$$

где значения амплитуд волн источников переизлучения $E_j(z_j)$ необходимо брать из решения уравнения (9).

При решении уравнения (9) для краткости записи введем обозначения:

$$k'_\alpha = 2\pi N\alpha\frac{k}{Cos(\alpha)}, \quad A_\alpha = k'_\alpha\,\Delta z, \quad c = Cos(\alpha+\beta), \quad d = Cos(\alpha-\beta), \qquad (13)$$

$$\bar{\bar{k}} = kCos(\alpha).$$

Чтобы решить уравнение (9), необходимо взять первую и вторую производную от этого уравнения для получения волнового уравнения амплитуд волн источников переизлучения.

$$\frac{d}{dz_l}E_l(z_l) = -\bar{k}\,A_\alpha E_0\ell^{i\bar{k}z_l} + c\bar{k}k'_\alpha\,\ell^{-i\bar{k}z_l}\int_{z_l}^{z_p}E_j(z_j)\ell^{i\bar{k}z_j}\,dz_j - ick'E_l(z_l) -$$

$$-d\,\bar{k}k'\,\ell^{i\bar{k}z_l}\int_{z_1}^{z_l}E_j(z_j)\ell^{-i\bar{k}z_j}\,dz_j + id\,k'E_l(z_l), \qquad (14)$$

$$\frac{d^2}{(dz_l)^2}E_l(z_l) = -i(\bar{k})^2\,A_\alpha E_0\ell^{i\bar{k}z_l} + -ic(\bar{k})^2\,k'_\alpha\,\ell^{-i\bar{k}z_l}\int_{z_l}^{z_p}E_j(z_j)\ell^{i\bar{k}z_j}\,dz_j -$$

$$-id(\bar{k})^2\,k'_\alpha\,\ell^{i\bar{k}z_l}\int_{z_1}^{z_l}E_j(z_j)\ell^{-i\bar{k}z_j}\,dz_j - (c+d)\bar{k}k'_\alpha\,E_l(z_l) - \qquad (15)$$

$$-i(c-d)k'_\alpha\frac{d}{z_l}E_l(z_l),$$

$$\frac{d^2}{(dz_l)^2}E_l(z_l) + \left(\left(\overline{k}\right)^2 + (c+d)\bar{k}k'\right)E_l(z_l) + i(c-d)k'\frac{d}{dz_l}E_l(z_l) = 0. \qquad (16)$$

Корнями характеристического уравнения (16) являются следующие соотношения

$$x_{1,2} = i\bar{k}\left[-\frac{c-d}{2}\frac{k'}{\bar{\bar{k}}} \pm \left(1+(c+d)\frac{k'}{\bar{\bar{k}}}+\left(\frac{c-d}{2}\frac{k'}{\bar{\bar{k}}}\right)^2\right)^{1/2}\right] = i\bar{k}(-\mu \pm u_\alpha). \quad (17)$$

$$u_\alpha = \left(1+(c+d)\frac{k'}{\bar{\bar{k}}}+\left(\frac{c-d}{2}\frac{k'}{\bar{\bar{k}}}\right)^2\right)^{1/2},$$

$$\mu = \frac{c-d}{2}\frac{k'}{\bar{\bar{k}}}. \quad (17^A)$$

Решением волнового уравнения (16) является следующая функциональная зависимость:

$$E_l(z_l) = C_1\ell^{x_1 z} + C_2\ell^{x_2 z},$$

$$E_l(z_l) = C_1\ell^{i\bar{k}(u_\alpha-\mu)z_l} + C_2\ell^{-i\bar{k}(u_\alpha+\mu)z_l}. \quad (18)$$

Константы C_1 и C_2 находятся из уравнений (9), (18) путем подстановки соотношений (18) в левую и правую часть интегрального уравнения (9).

$$C_1\ell^{i\bar{k}(u-\mu)z} + C_2\ell^{-i\bar{k}(u+\mu)z} = iAE_0\ell^{i\bar{k}z} + iC_1ck'\ell^{-i\bar{k}z}\int_z^L \ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)z'}dz' +$$

$$+iC_2ck'\ell^{-i\bar{k}z}\int_z^L \ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)z'}dz' + iC_1dk'\ell^{i\bar{k}z}\int_0^z \ell^{-i\bar{k}(1-u+\mu)z'}dz' + \quad (19)$$

$$+iC_2dk'\ell^{i\bar{k}z}\int_0^L \ell^{-i\bar{k}(1+u+\mu)z'}dz'.$$

Интегрирование в правой части соотношения (19) приводит к следующему результату.

$$C_1\ell^{i\bar{k}(u-\mu)z}+C_2\ell^{-i\bar{k}(u+\mu)z}=iAE_0\ell^{i\bar{k}z}+C_1\frac{ick'}{i\bar{k}(1+u-\mu)}\ell^{-i\bar{k}z}*$$

$$*\left(\ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)L}-\ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)z}\right)+$$

$$+C_2\frac{ick'}{i\bar{k}(1-u-\mu)}\ell^{-i\bar{k}z}\left(\ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)L}-\ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)z}\right)+ \tag{20}$$

$$+C_1\frac{idk'}{-i\bar{k}(1-u+\mu)}\ell^{i\bar{k}z}\left(\ell^{-i\bar{k}(1-u+\mu)z}-1\right)+$$

$$+C_2\frac{idk'}{-i\bar{k}(1+u+\mu)}\ell^{i\bar{k}z}\left(\ell^{-i\bar{k}(1+u+\mu)z}-1\right).$$

Уравнение (20) должно выполняться при любых значениях координаты z. Это значит, что коэффициенты при одинаковых экспонентах в своей сумме должны равняться нулю. Выпишем эти коэффициенты при экспонентах.

$$\ell^{i\bar{k}z}\left[iAE_0+C_1\frac{idk'}{i\bar{k}(1-u+\mu)}+C_2\frac{idk'}{i\bar{k}(1+u+\mu)}\right]=0. \tag{21}$$

$$\ell^{-i\bar{k}z}\left[C_1\frac{ick'\,\ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)L}}{i\bar{k}(1+u-\mu)}+C_2\frac{ick'\,\ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)L}}{i\bar{k}(1-u-\mu)}\right]=0. \tag{22}$$

$$\ell^{i\bar{k}(u-\mu)z}\left[C_1+C_1\frac{ick'}{i\bar{k}(1+u-\mu)}+C_1\frac{idk'}{i\bar{k}(1-u+\mu)}\right]=0. \tag{23}$$

$$\ell^{-i\bar{k}(u+\mu)z}\left[C_2+C_2\frac{ick'}{i\bar{k}(1-u-\mu)}+C_2\frac{idk'}{i\bar{k}(1+u+\mu)}\right]=0. \tag{24}$$

Из соотношения (23) следует подтверждение формул (17^{A}).

$$(1+u-\mu)(1-u+\mu)+\frac{k'}{\bar{k}}c(1-u+\mu)+\frac{k'}{\bar{k}}d(1+u-\mu)=0,$$
$$\frac{k'}{\bar{k}}(c+d)=u^2-1-\mu^2. \qquad (25)$$

Из соотношения (24) следует подтверждение формул (17^A).

$$(1+u+\mu)(1-u-\mu)+\frac{k'}{\bar{k}}c(1+u+\mu)+\frac{k'}{\bar{k}}d(1-u-\mu)=0,$$
$$\frac{k'}{\bar{k}}(c+d)=u^2-1-\mu^2. \qquad (26)$$

Из соотношения (22) следует отношение между константами.

$$C_2=-C_1\frac{1-u-\mu}{1+u-\mu}\ell^{2i\bar{k}uL}. \qquad (27)$$

Из соотношения (21) следует функциональная зависимость для константы C_1.

$$C_1=-i\frac{E_0}{d}\bar{k}\Delta z(1+u-\mu)\frac{\ell^{-i\bar{k}uL}}{D_\alpha}, \qquad (28)$$

$$D_\alpha=\frac{(1+u-\mu)}{(1-u+\mu)}\ell^{-i\bar{k}uL}-\frac{(1-u-\mu)}{(1+u+\mu)}\ell^{i\bar{k}uL}. \qquad (29)$$

Из (27), (28) следует функциональная зависимость для константы C_2.

$$C_2=i\frac{E_0}{d}\bar{k}\Delta z(1-u-\mu)\frac{\ell^{i\bar{k}uL}}{D_\alpha}. \qquad (30)$$

Из функциональных зависимостей для констант (28), (30) и соотношения для амплитуды волны источника переизлучения (18) находим функциональную зависимость для амплитуд волн плоских источников переизлучения.

$$E(z)=i\frac{E_0}{d}\bar{k}\Delta z\frac{\ell^{-i\bar{k}\mu z}}{D_\alpha}\left[(1-u-\mu)\ell^{i\bar{k}u(L-z)}-(1+u-\mu)\ell^{-i\bar{k}u(L-z)}\right]. \qquad (31)$$

Запишем формулы (11), (12) для амплитуд суммарного (суммируются волны, излучаемые плоскими источниками переизлучения (31)) электрического поля волн двух направлений в интегральгой форме.

$$E^{+}(z) = E_0 \ell^{i\bar{k}z} + \frac{d}{\Delta z} \int_0^z E(z') \ell^{i\bar{k}(z-z')} dz',$$

$$E^{-}(z) = \frac{c}{\Delta z} \int_z^L E(z') \ell^{i\bar{k}(z'-z)} dz'. \qquad (32)$$

Подставим значения амплитуд волн источников переизлучения (31) в функциональные зависимости (32).

$$E^{+}(z) = E_0 \ell^{i\bar{k}z} + i\bar{k} \frac{E_0}{D_\alpha} (1-u-\mu) \ell^{i\bar{k}uL} \ell^{i\bar{k}z} \int_0^z \ell^{-i\bar{k}(1+u+\mu)z'} dz' -$$

$$-i\bar{k} \frac{E_0}{D_\alpha} (1+u-\mu) \ell^{-i\bar{k}uL} \ell^{i\bar{k}z} \int_0^z \ell^{-i\bar{k}(1-u+\mu)z'} dz'. \qquad (33)$$

Вычисление интегралов приводит к такому результату.

$$E^{+}(z) = E_0 \ell^{i\bar{k}z} + i\bar{k} \frac{E_0}{D_\alpha} \ell^{i\bar{k}uL} \frac{1-u-\mu}{-i\bar{k}(1+u+\mu)} \ell^{i\bar{k}z} \left(\ell^{-i\bar{k}(1+u+\mu)z} - 1 \right) -$$

$$-i\bar{k} \frac{E_0}{D_\alpha} \ell^{-i\bar{k}uL} \frac{1+u-\mu}{-i\bar{k}(1-u+\mu)} \ell^{i\bar{k}z} \left(\ell^{-i\bar{k}(1-u+\mu)z} - 1 \right). \qquad (34)$$

После суммирования слагаемых при экспонентах и сокращений получим:

$$E_0 \ell^{i\bar{k}z} \left(1 + \frac{\ell^{i\bar{k}uL}}{D_\alpha} \frac{1-u-\mu}{1+u+\mu} - \frac{\ell^{-i\bar{k}uL}}{D_\alpha} \frac{1+u-\mu}{1-u+\mu} \right) = 0, \qquad (35)$$

$$E^{+}(z) = \frac{E_0}{D_\alpha} \ell^{-i\bar{k}\mu z} \left[\frac{1+u_\alpha-\mu}{1-u_\alpha+\mu} \ell^{-i\bar{k}u_\alpha(L-z)} - \frac{1-u_\alpha-\mu}{1+u_\alpha+\mu} \ell^{i\bar{k}u_\alpha(L-z)} \right]. \qquad (36)$$

$$D_\alpha = \frac{(1+u_\alpha-\mu)}{(1-u_\alpha+\mu)} \ell^{-i\bar{k}u_\alpha L} - \frac{(1-u_\alpha-\mu)}{(1+u_\alpha+\mu)} \ell^{i\bar{k}u_\alpha L}. \qquad (37)$$

Аналогично поступим при получении функциональной зависимости для амплитуды волны, движущейся в обратном направлении.

$$E^{-}(z)=\frac{c}{d}\frac{E_0}{D_\alpha}i\bar{k}(1-u-\mu)\ell^{i\bar{k}uL}\ell^{-i\bar{k}z}\int_z^L \ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)z'}dz'-$$
$$-\frac{c}{d}\frac{E_0}{D_\alpha}i\bar{k}(1+u-\mu)\ell^{-i\bar{k}uL}\ell^{-i\bar{k}z}\int_z^L \ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)z'}dz'. \qquad (38)$$

Решение интегралов в правой части (38) приводит к результату.

$$E^{-}(z)=\frac{c}{d}\frac{E_0}{D_\alpha}\ell^{i\bar{k}uL}\ell^{-i\bar{k}z}\left(\ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)L}-\ell^{i\bar{k}(1-u-\mu)z}\right)-$$
$$-\frac{c}{d}\frac{E_0}{D_\alpha}\ell^{-i\bar{k}uL}\ell^{-\bar{k}z}\left(\ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)L}-\ell^{i\bar{k}(1+u-\mu)z}\right). \qquad (39)$$

После группировки слагаемых при экспонентах, получим:

$$\ell^{-i\bar{k}z}\left(\ell^{i\bar{k}(1-\mu)L}-\ell^{i\bar{k}(1-\mu)L}\right)=0, \qquad (40)$$

$$E^{-}(z)=\frac{c}{d}\frac{E_0}{D_\alpha}\ell^{-i\bar{k}\mu z}\left(\ell^{-i\bar{k}u_\alpha(L-z)}-\ell^{i\bar{k}u_\alpha(L-z)}\right). \qquad (41)$$

В формулах (36), (37), (41) введены обозначения:

$$c=Cos(\alpha+\beta),\quad d=Cos(\alpha-\beta),\quad \bar{k}=kCos(\alpha),\quad k'=2\pi N\alpha\frac{k}{Cos(\alpha)},$$
$$\mu=\frac{c-d}{2}\frac{k'}{\bar{k}},\quad u_\alpha=\left(1+(c+d)\frac{k'}{\bar{k}}+\mu^2\right)^{1/2}. \qquad (42)$$

В формулах (36), (37), (41) для амплитуд прошедшей и отраженной волн, в случае падения возбуждающей волны на плоскость пленки под углом, отличающемся от нормального, реализована ситуация, когда электрический вектор волны расположен в плоскости падения луча. Для случая, когда электрический вектор расположен перпендикулярно плоскости падения луча, в отмеченных формулах величины c и d равны единице. В случае падения луча нормально на плоскость пленки: c=d=Cos(α)=1.

Для полубесконечной среды в формулах (36), (37), (41) L→∞, $u_\alpha \equiv u_\alpha + i\gamma$, откуда следуют функциональные зависимости для преломленной и отраженной волн:

$$E^{+}(z) = E_0 \ell^{-i\bar{k}\mu z} \ell^{i\bar{k}u_\alpha z}, \qquad (43)$$

$$E^{-}(z) = E_0 \frac{Cos(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha-\beta)} \frac{1-u_\alpha+\mu}{1+u_\alpha-\mu} \ell^{-i\bar{k}\mu z} \ell^{i\bar{k}u_\alpha z}, \qquad (44)$$

$$E^{-}(z=0) = E_0 \frac{Cos(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha-\beta)} \frac{1-u_\alpha+\mu}{1+u_\alpha-\mu}. \qquad (45)$$

Для полубесконечной среды преломление электрической волны изобразим графически на рис.3.

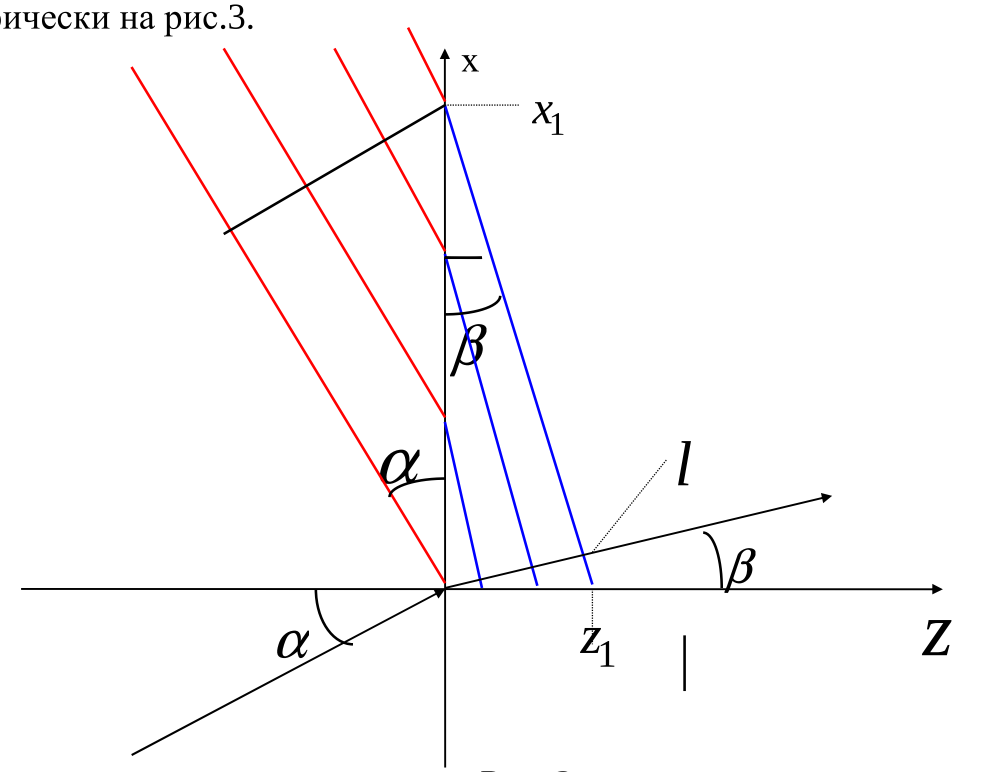

Рис. 3.

Здесь волновые фронты возбуждающей волны изображены линиями, расположенными под углом α к оси x, волновые фронты преломленной волны отображены линиями, расположенными под углом β. Согласно рисунка фазовая задержка в точке x_1 относительно начала координат равна целому числу длин волн и выражается следующей зависимостью.

$$\begin{aligned} &n\lambda = x_1 Sin(\alpha), \\ &n2\pi = kx_1 Sin(\alpha), \\ &x_1 = \frac{n\lambda}{Sin(\alpha)}. \end{aligned} \tag{46}$$

Амплитуда преломленной волны для случая падения возбуждающей волны под углом (согласно (43)) равна

$$E_1^+(z = z_1) = E_0\, \ell^{ikCos(\alpha)(u_\alpha - \mu)z_1}\ , \tag{47}$$

где значение u_α необходимо брать из формулы (17^A).

При этом фазовая задержка для преломленной волны вдоль координаты z в точке z_1 согласно рисунка также равна целому числу длин волн.

$$\begin{aligned} &n2\pi = kCos(\alpha)(u_\alpha - \mu)z_1, \\ &z_1 = \frac{n\lambda}{Cos(\alpha)(u_\alpha - \mu)}. \end{aligned} \tag{48}$$

Значение угла преломления β находится из отношения координат точек.

$$\begin{aligned} &tg(\beta) = \frac{z_1}{x_1} = \frac{Sin(\alpha)}{(u_\alpha - \mu)Cos(\alpha)}, \\ &u_\alpha - \mu = \frac{tg(\alpha)}{tg(\beta)} = \frac{Sin(\alpha)Cos(\beta)}{Cos(\alpha)Sin(\beta)}. \end{aligned} \tag{49}$$

Амплитуда отраженной волны в случае падения возбуждающей волны под произвольным углом согласно (45) равна

$$E_1^-(z=0) = E_0 \frac{Cos(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha-\beta)} \frac{1 - u_\alpha + \mu}{1 + u_\alpha - \mu}\ . \tag{50}$$

Коэффициент отражения от полубесконечной плоскости соответственно равен

$$R_\alpha = \frac{Cos(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha-\beta)}\frac{1-u_\alpha+\mu}{1+u_\alpha-\mu} = \frac{Cos(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha-\beta)}\frac{1-\dfrac{tg(\alpha)}{tg(\beta)}}{1+\dfrac{tg(\alpha)}{tg(\beta)}} = \quad (51)$$

$$= -\frac{Sin(\alpha-\beta)}{Sin(\alpha+\beta)}\frac{Cos(\alpha+\beta)}{Cos(\alpha-\beta)} = -\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}$$

Из формулы для коэффициента отражения (51) следует минимум коэффициента отражения при угле Брюстера, когда

$$Cos(\alpha_B+\beta)=0,$$
$$\beta = \pi/2-\alpha_B. \quad (52)$$

При этом коэффициент замедления скорости в среде (42) принимает значение

$$c = Cos(\alpha_B+\beta)=0, \quad d = Cos(\alpha_B-\beta), \quad \bar{k} = kCos(\alpha_B),$$

$$k' = 2\pi N\alpha\frac{k}{Cos(\alpha_B)}, \quad \mu = \frac{c-d}{2}\frac{k'}{\bar{k}},$$

$$u_\alpha = \left(1+(c+d)\frac{k'}{\bar{k}}+\mu^2\right)^{1/2} = \left(1+2\frac{\pi N\alpha d}{Cos^2(\alpha_B)}+\left(\frac{\pi N\alpha d}{Cos^2(\alpha_B)}\right)^2\right)^{1/2} = \quad (53)$$

$$= u_\alpha^B = 1+\frac{\pi N\alpha d}{Cos^2(\alpha_B)}..$$

Используя соотношение (52), выразим коэффициент d через угол Брюстера.

$$d = Cos(\alpha_B-\beta) = Cos(2\alpha_B-\pi/2) = Cos(\pi/2-2\alpha_B) = Sin(2\alpha_B) =$$
$$= d = 2Sin(\alpha_B)Cos(\alpha_B). \quad (54)$$

Закон преломления, выражающий отношение между углом падения и углом преломления (49) при угле Брюстера, используя соотношения (53), (54), примет значение:

$$\frac{tg(\alpha_B)}{tg(\beta)} = u_\alpha^B-\mu^B = 1+2\frac{\pi N\alpha d}{Cos^2(\alpha_B)} = 1+4\pi N\alpha\, tg(\alpha_B). \quad (55)$$

При использовании соотношения (52) функциональная зависимость (55) примет вид квадратного уравнения.

$$tg^2(\alpha_B) = 1 + 4\pi\, N\alpha\, tg(\alpha_B). \tag{56}$$

Решением этого уравнения будет функциональная зависимость угла Брюстера от параметров среды.

$$tg(\alpha_B) = 2\pi\, N\alpha + \sqrt{1 + (2\pi\, N\alpha)^2}\,, \quad u_0 = \sqrt{1 + 4\pi\, N\alpha}, \tag{57}$$

где u_0 – показатель замедления скорости в среде в случае нормального падения луча на плоскость полубесконечной среды. Например, для показателя замедления скорости u_0=1.5 угол Брюстера равен $\alpha_B = 61^0$.

Литература

1. Косинский Ю.И., Взаимодействие волны электрического поля с оптической средой в микроструктурной модели в случае падения волнового вектора на плоскость среды под углом, при этом вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения луча, 1–15, (2002).