Косинский Ю.И.

Макроструктурная матрица слоя оптической среды в микроструктурной модели взаимодействия волны электрического поля с веществом

В работе [1] была выведена микроструктурная матрица условной переизлучающей плоскости оптической среды и в матричной форме была решена задача по определению характеристик поля встречных волн (амплитуда, фаза) в неоднородном (впервые) ограниченном плоскопараллельном слое среды. Матрица неоднородного плоскопараллельного слоя среды находилась в виде произведения микроструктурных матриц условных переизлучающих плоскостей. Матричные элементы матрицы неоднородного слоя среды в явном виде найти невозможно. Такая задача решается только численно с помощью ЭВМ.

Запишем систему уравнений [1] в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} E_l^+ \\ E_{l+1}^- \end{pmatrix} = \Delta M_l(z_l) \begin{pmatrix} E_{l-1}^+ \\ E_l^- \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\Delta M_l(z_l)$ – микроструктурная матрица преобразования волны электрического поля на условной плоскости переизлучения (векторы волн поля – в пространстве направлений) равна

$$\Delta M_l(z_l) = \ell^{ik\delta^2 z_l} \begin{pmatrix} \left[1 + \bar{\bar{r}}(z_l)\right] \ell^{ik\delta z_l} & \bar{\bar{r}}\, \ell^{-ik\delta^2 z_l} \\ -\bar{\bar{r}}(z_l)\, \ell^{ik\delta^2 z_l} & \left[1 - \bar{\bar{r}}(z_l)\right] \ell^{-ik\delta z_l} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения: $\delta z_l = 1/2(z_{l+1} - z_{l-1})$ – среднее приращение фазы первого порядка, $\delta^2 z_l = 1/2(2z_l - z_{l-1} - z_{l+1})$ – приращение фазы второго порядка.

$$\overline{\overline{r}}(z_l) = i\,\frac{2\pi k\alpha}{\Delta x\,\Delta y} = i2\pi k N_{xy}(z_l)\alpha(z_l), \qquad (3)$$

Для среды, представленной в виде p переизлучающих плоскостей, матричное соотношение, связывающее компоненты волн электрического поля в пространстве направлений на первой и второй границах раздела вакуум–среда , примет вид.

$$\prod_{l=1}^{p}\Delta M_l(z_l)\begin{pmatrix}E_0^+\\ E_1^-\end{pmatrix} = M(z_p)\begin{pmatrix}E_0^+\\ E_1^-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_p^+\\ E_{p+1}^-\end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Для однородного слоя среды микроструктурная матрица (2) отдельной плоскости равна:

$$\Delta M_j = \begin{pmatrix}\left[1+\overline{\overline{r}}\right]\ell^{i\theta} & \overline{\overline{r}}\\ -\overline{\overline{r}} & \left[1-\overline{\overline{r}}\right]\ell^{-i\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $\theta = k\,\Delta z$.

Детерминант такой матрицы равен единице. Собственные значения [2] матрицы равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21}} = \ell^{\pm i\varphi}, \qquad (6)$$

где $$\varphi = arc\,tg\,\frac{Sin(\theta)\sqrt{1+(\overline{\overline{r}})^2 - 2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)}}{Cos(\theta)+i\,\overline{\overline{r}}\,Sin(\theta)}. \qquad (7)$$

В функциональной зависимости (7) произведение $i\bar{\bar{r}}$ – величина действительная, так как, согласно (3), величина $\bar{\bar{r}}$ – чисто мнимая.
Для среды, состоящей из p идентичных плоскостей, матрица среды равна

$$\prod_{l=1}^{p} \Delta M_l(z_l) = M(z_p) = \left(\Delta M\right)^p, \tag{8}$$

где $p = \frac{L}{\Delta z} + 1$ – произвольное число.
При возведении в степень, матрицу удобно представить в виде [2]

$$\Delta M = (T)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}(T)^{-1}, \tag{9}$$

$$M(z_p) = (\Delta M)^p = (T)\begin{pmatrix} (\lambda_1)^p & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^p \end{pmatrix}(T)^{-1}, \tag{10}$$

где $\lambda_{1,2}$ – собственные значения (6) матрицы ΔM,

$(T) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$ – матрица преобразования, приводящая исследуемую матрицу к диагональному виду,

$(T)^{-1} = \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{pmatrix}$ – матрица, обратная матрице (T), т.е. $(T)(T)^{-1} = (1)$.

Матричные элементы преобразующей матрицы связаны с матричными элементами исследуемой матрицы таким образом [2]

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)}}\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

С учетом конкретных значений матричных элементов основной матрицы (5), матричные элементы преобразующей матрицы имеют следующие функциональные зависимости.

$$T_{11} = T_{12} = \left(\frac{2i\,\overline{\overline{r}}}{Sin(\theta)}\,A \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{i\,\overline{\overline{r}}}{Sin(\theta)}, \tag{12}$$

$$T_{21} = \left(\frac{2i\,\overline{\overline{r}}}{Sin(\theta)}\,A \right)^{-\frac{1}{2}} (1 - i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) - A), \tag{13}$$

$$T_{22} = \left(\frac{2i\,\overline{\overline{r}}}{Sin(\theta)}\,A \right)^{-\frac{1}{2}} (1 - i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) + A), \tag{14}$$

где $A = \sqrt{1 + (\overline{\overline{r}})^2 - 2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)}$. (15)

Из соотношений (10), (12) – (14) находятся функциональные зависимости для матричных элементов матрицы $M(z_p)$

$$M_{11} = \frac{\ell^{\,ip\varphi}}{2A}(1 - i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) + A) - \frac{\ell^{\,-ip\varphi}}{2A}(1 - i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) - A), \tag{16}$$

$$M_{22} = \frac{\ell^{\,-ip\varphi}}{2A}(1 - i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) + A) - \frac{\ell^{\,ip\varphi}}{2A}(1 - i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) - A), \tag{17}$$

$$M_{21} = -M_{12} = \frac{1}{2A}\frac{i\,\overline{\overline{r}}}{Sin(\theta)}\left(\ell^{\,ip\varphi} - \ell^{-ip\varphi}\right), \tag{18}$$

где $A = \sqrt{1 + (\overline{\overline{r}})^2 - 2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)}$,

$$\varphi = arc\,tg\,\frac{Sin(\theta)\sqrt{1+(\overline{\overline{r}})^2 - 2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)}}{Cos(\theta)+i\,\overline{\overline{r}}\,Sin(\theta)}.$$

Если количество плоскостей в системе $p = 1 \div 3$, то удобнее использовать степенное представление экспоненциальной функции в соотношениях (16) – (18).

$$\ell^{ip\varphi} = \left(Cos(\theta)+i\,\overline{\overline{r}}\,Sin(\theta)+i\,Sin(\theta)\sqrt{1+(\overline{\overline{r}})^2-2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)}\right)^p. \quad (19)$$

При разложении в ряд функций в соотношениях (16) – (18) ограничимся линейным приближением по параметрам среды $i\,\overline{\overline{r}} << 1$ и $\theta = k\,\Delta z << 1$. В результате последует ряд упрощений.

$$p \cong \frac{L}{\Delta z}, \quad Sin(\theta) \cong k\,\Delta z, \quad Cos(\theta) \cong 1, \quad Ctg(\theta) \cong \frac{1}{k\,\Delta z}, \quad (20)$$

$$p\varphi = p\,arc\,tg\,\frac{Sin(\theta)\sqrt{1+(\overline{\overline{r}})^2-2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)}}{Cos(\theta)+i\,\overline{\overline{r}}\,Sin(\theta)} \cong$$

$$\cong kL\sqrt{1-\frac{2i\,\overline{\overline{r}}}{k\,\Delta z}} = kL\sqrt{1+4\pi N\alpha} = kLu, \quad (21)$$

$$-i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) \cong \frac{u^2-1}{2}, \quad \frac{i\,\overline{\overline{r}}}{Sin(\theta)} \cong \frac{1-u^2}{2}, \quad (22)$$

$$A = \sqrt{1+(\overline{\overline{r}})^2-2i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta)} \cong u. \quad (23)$$

$$(1-i\,\overline{\overline{r}}\,Ctg(\theta) \pm A) \cong \frac{(1\pm u)^2}{2}. \quad (24)$$

В соотношениях (21) – (23) был выведен параметр u, ответственный за коэффициент замедления скорости электрической волны в среде [3].

$$u = \sqrt{1 + 4\pi N\alpha} \, . \tag{25}$$

С учетом соотношений (20) – (24) матричные элементы (16) – (18) матрицы слоя среды примут вид

$$M_{11} = \frac{1}{4u}\left[\ell^{ikuL}(1+u)^2 - \ell^{-ikuL}(1-u)^2\right], \tag{26}$$

$$M_{22} = \frac{1}{4u}\left[\ell^{-ikuL}(1+u)^2 - \ell^{ikuL}(1-u)^2\right], \tag{27}$$

$$M_{12} = -M_{21} = \frac{u^2 - 1}{4u}\left(\ell^{ikuL} - \ell^{-ikuL}\right). \tag{28}$$

Детерминант матрицы (26) – (28) равен единице

$$DetM(L) = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1,$$

собственные значения матрицы равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{11} - M_{22}}{2}\right)^2 + M_{12}M_{21}} = \ell^{\pm i\,kuL},$$

произведение двух матриц от разных аргументов равно матрице от суммы этих аргументов

$$M(L_1)M(L_2) = M(L_2)M(L_1) = M(L_1 + L_2). \tag{28^{A}}$$

Непосредственной подстановкой [1] легко убедиться, что приближенные выражения для амплитуд прошедшей и отраженной волн

$$E_{p+1}^{+} = \frac{1}{M_{22}(L)}E_0 = \frac{\dfrac{4u}{1-u^2}}{\dfrac{1+u}{1-u}\ell^{-ikuL} - \dfrac{1-u}{1+u}\ell^{ikuL}}E_0, \tag{29}$$

$$E_1^- = -\frac{M_{21}(L)}{M_{22}(L)}E_0 = \frac{\ell^{-ikuL} - \ell^{ikuL}}{\frac{1+u}{1-u}\ell^{-ikuL} - \frac{1-u}{1+u}\ell^{ikuL}}E_0, \qquad (30)$$

полностью совпадают с соотношениями, выведенными другим способом [3].

Функциональные зависимости для амплитуд встречных волн внутри среды также полностью совпадают с функциональными зависимостями, полученными в работе [3].

$$E_j^+ = E_0 \frac{M_{11}(z_j)M_{22}(L) - M_{12}(z_j)M_{21}(L)}{M_{22}(L)} = \qquad [1]$$

$$= \frac{\frac{1+u}{1-u}\ell^{-iku(l-z_j)} - \frac{1-u}{1+u}\ell^{iku(L-z_j)}}{\frac{1+u}{1-u}\ell^{-ikuL} - \frac{1-u}{1+u}\ell^{ikuL}}E_0, \qquad (31)$$

$$E_{j+1}^- = E_0 \frac{M_{21}(z_j)M_{22}(L) - M_{22}(z_j)M_{21}(L)}{M_{22}(L)} = \qquad [1]$$

$$= \frac{\ell^{-iku(l-z_j)} - \ell^{iku(L-z_j)}}{\frac{1+u}{1-u}\ell^{-ikuL} - \frac{1-u}{1+u}\ell^{ikuL}}E_0, \qquad (32)$$

Из точных соотношений для матричных элементов (16) – (18) матрицы среды и функциональных зависимостей для амплитуд встречных волн [1], выраженных через матричные элементы, можно найти точные выражения для полей встречных волн внутри среды.

Таким образом, использовав матричный метод решения задачи применительно к исследованию взаимодействия волн электрического поля и среды в представлении микроструктурной модели были подтверждены полностью все результаты, полученные (впервые) интегрально–дифференциальным методом [3]. Матричный метод находит широкое применение в расчете характеристик коэффициентов отражения многослойных диэлектрических зеркал, различных напыленных пленок и т.д. При этом каждый напыленный слой пленки характеризуется своей однородной матрицей (26) – (28), а многослойная система – произведением матриц всех пленок с учетом их очередности расположения. Из матричных элементов результирующей матрицы и формул, выведенных в работе [1], для матричных элементов можно получить все данные по вопросу отражения, пропускания и прохождения волн электрического поля сквозь зеркало.

Литература

1. Косинский Ю.И., Метод матриц в микроструктурной модели взаимодействия электрического поля с оптически неоднородной средой, 1– 7, (200).
2. Косинский Ю.И., Собственные векторы, собственные значения, преобразующие и обратные матрицы матриц второго порядка, 1 – 6, (2002).
3. Косинский Ю.И., Микроструктурная модель взаимодействия волны электрического излучения со слоем среды шириной L в случае нормального падения, 1 – 7, (2002).