Косинский Ю.И.

Собственные векторы, собственные значения, преобразующие и обратные матрицы матриц порядка (2×2)

В оптике часто применяют матрицы порядка (2×2), примером может служить матрица Джонса, и связанный с этой матрицей вектор Максвелла, используемые для описания состояния поляризации света [1], а также микроструктурная матрица и связанный с этой матрицей вектор, используемые для описания интенсивностей и фаз распространяющихся электрических волн встречных направлений в оптической среде [2]. В общем виде матричные элементы и компоненты векторов в этих работах имеют комплексные величины и применять правила и общие формулы для собственных значений и собственных векторов матриц произвольного порядка, изложенные в работе [3] очень неудобно. Поэтому в данной работе на примере матрицы порядка (2×2) приводятся конкретные формулы, выраженные через матричные элементы основной матрицы, для собственных векторов, собственных значений, элементов преобразующей и обратной матрицы. При выводе этих формул была использована методика, изложенная в работе [3].

Дана матрица $[a_{ij}]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и вектор, отличный от нуля, $[E_i]=\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$, представленный столбиком. Если вектор таков, что преобразования, которые выполняет над ним матрица, сводятся к удлинению или сжатию, то он называется собственным вектором, его направление – собственным направлением и коэффициент его удлинения или сжатия λ – собственным значением матрицы. Это имеет место, если

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Расписав произведение матрицы на вектор слева в (1), получим систему двух уравнений.

$$a_{11}E_1+a_{12}E_2=\lambda\, E_1, \qquad (2)$$

$$a_{21}E_1 + a_{22}E_2 = \lambda\, E_2\,. \tag{3}$$

Из уравнений (2), (3) находим тождественные отношения для компонент собственного вектора (1).

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{a_{12}}{\lambda - a_{11}}\,, \qquad \frac{E_2}{E_1} = \frac{a_{21}}{\lambda - a_{22}}\,. \tag{4}$$

Подставив значение E_2 из уравнения (3) в уравнение (2), или подставив значение E_1 из уравнения (2) в уравнение (3), получим квадратное уравнение для нахождения величины собственного значения матрицы.

$$\lambda^2 - \lambda\,(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0\,. \tag{5}$$

Решение квадратного уравнения (5) дает две величины собственного значения, выраженные через матричные элементы матрицы.

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}\,, \tag{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}}\,. \tag{7}$$

Двум собственным значениям матрицы (6), (7) соответствуют два собственных вектора с соотношениями компонент (4).

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{22} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_2 - a_{22} \\ a_{21} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Известно, что существуют диагональные матрицы. И существуют преобразования, приводящие к новой системе координат, в которой матрица имеет диагональный вид, по диагонали которой расположены собственные значения этой матрицы. Естественно предположить, что матричные элементы преобразующей матрицы состоят из компонент собственных векторов матрицы, которую необходимо преобразовать. Преобразующую матрицу обозначим так.

$$\left[E_{i\,j}\right]=\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

В нашем конкретном случае основной матрицы второго порядка, преобразующая матрица (10) с учетом значений собственных векторов (8), (9) имеет следующие компоненты.

$$\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12} & a_{12}\\ \lambda_1-a_{11} & \lambda_2-a_{11}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}\lambda_1-a_{22} & \lambda_2-a_{22}\\ a_{21} & a_{21}\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Матричные элементы обратной матриц от преобразующей матрицы находятся в таком соответствии с матричными элементами преобразующей матрицы.

$$\left[E_{ij}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}E_{22} & -E_{12}\\ -E_{21} & E_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_2-a_{11} & -a_{12}\\ -(\lambda_1-a_{11}) & a_{12}\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Если для краткости записи матрицы обозначать одной буквой, преобразования выглядят таким образом.

$$(E)^{-1}(E)=Det(E)(1),\quad (E)^{-1}(A)(E)=Det(E)(\lambda_{1,2}), \tag{13}$$

$$(E)(E)^{-1}=Det(E)(1),\quad (E)(\lambda_{1,2})(E)^{-1}=Det(E)(A), \tag{14}$$

где (A) – основная матрица, (1) – единичная матрица,

(E) – преобразующая матрица, $(E)^{-1}$ – обратная преобразующей матрица,

$(\lambda_{1,2})$ – диагональная матрица, в диагонали которой находятся собственные значения основной матрицы.

$$(\lambda_{1,2})=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

Непосредственной подстановкой в соотношение (14) функциональных зависимостей для преобразующей и обратной ей матрицы (11), (12)

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 - a_{11} & -a_{12} \\ -(\lambda_1 - a_{11}) & a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= Det(E) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{15}$$

и прямым вычислением матричных произведений (5) можно убедиться в справедливости равенств (14), (15). Где детерминант преобразующей матрицы равен

$$Det(E) = E_{11}E_{22} - E_{12}E_{21} = -(\lambda_1 - \lambda_2)a_{12}. \tag{16}$$

Для тождественной преобразующей матрицы (11) равенство (14) запишется

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{22} & \lambda_2 - a_{22} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} & -(\lambda_2 - a_{22}) \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2)a_{21} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{17}$$

Прямым вычислением произведений матриц можно убедиться в соблюдении равенства (17).

Непосредственной подстановкой в соотношение (13) функциональных зависимостей для преобразующей и обратной ей матрицы (11), (12) и прямым вычислением матричных произведений можно убедиться в справедливости равенств (13).

Введем понятие нормированной преобразующей и обратной ей матрицы.

$$(T) = \frac{(E)}{\sqrt{Det(E)}}, \quad (T)^{-1} = \frac{(E)^{-1}}{\sqrt{Det(E)}}. \tag{18}$$

Учитывая (13), (14) и (18), можно записать.

$$(T)^{-1}(T) = (1), \quad (T)^{-1}(A)(T) = (\lambda_{1,2}), \tag{19}$$

$$(T)(T)^{-1} = (1), \quad (T)(\lambda_{1,2})(T)^{-1} = (A). \tag{20}$$

При возведении основной матрицы (A) в произвольную степень p из соотношений (20) следует

$$(A)^p = (T)(\lambda_{1,2})^p (T)^{-1}, \qquad (21)$$

где возведенная в степень диагональная матрица с собственными значениями в соотношении (21) равна

$$(\lambda_{1,2})^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 \\ 0 & \lambda_2^p \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Чтобы получить окончательный результат возведения в степень матрицы второго порядка необходимо произвести вычисление произведения матриц в соотношении (21). Подставив функциональные зависимости (11), (12), (16), (18), (22) в матричное произведение (21), получим.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^p = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \left(\lambda_1^p + \lambda_2^p\right)\sqrt{q} + \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\left(\lambda_1^p - \lambda_2^p\right) & \left(\lambda_1^p - \lambda_2^p\right)a_{12} \\ \left(\lambda_1^p - \lambda_2^p\right)a_{21} & \left(\lambda_1^p + \lambda_2^p\right)\sqrt{q} - \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\left(\lambda_1^p - \lambda_2^p\right) \end{pmatrix} \qquad (23)$$

где подкоренное выражение равно

$$q = \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}\, a_{21}. \qquad (24)$$

Учитывая свойство любой функции от переменной быть разложенной в степенные ряды [4], а также свойство сложения матриц [5], можно вывести формулу для любой f функции от матрицы второго порядка. Результат таков.

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \left(f(\lambda_1) + f(\lambda_2)\right)\sqrt{q} + \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\left(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\right) & \left(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\right)a_{12} \\ \left(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\right)a_{21} & \left(f(\lambda_1) + f(\lambda_2)\right)\sqrt{q} - \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\left(f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\right) \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Методику, изложенную выше, можно применять также для матриц более высокого порядка.

Литература

1. А. Джеррард, Дж.М. Берч, Введение в матричную оптику, 217 – 230, (1978).
2. Косинский Ю.И., Метод матриц в микроструктурной модели взаимодействия электрического поля с оптически неоднородной средой, 1 – 7, 2002..
3. Андре Анго, Математика для электро и радиоинженеров, 177 –192, (1967).
4. И.Н. Бронштейн и К.А. Семендяев, Справочник по математике, 324 – 329, (1962).