Косинский Ю.И.

Микроструктурная модель взаимодействия электрического поля с оптически прозрачными средами или принцип переизлучения на диполях в оптических явлениях

Рассмотрим взаимодействие плоской электрической волны со средой, представленной в виде произвольного числа p переизлучающих плоскостей – бесконечно плоских решеток, в узлах которых расположены атомы. В атомах такой решетки (переизлучающей плоскости) под действием внешнего электрического поля с плоским фронтом волны наводятся диполи, которые являются источником переизлучения плоской электрической волны по обе стороны от плоскости. Для амплитуд электрических волн переизлучения плоскостями в работе [1] была выведена система уравнений

$$E_l\,(z_l\,) = r\,E_0\,\ell^{i\,k\,z_l} + r \sum_{\substack{z_j = z_1 \\ z_j \neq z_l}}^{z_p}{}' E_j\,(z_j\,)\,\ell^{\,i\,k\left|z_l - z_j\right|} , \qquad (1)$$

где r – эффективный коэффициент диполь–дипольного взаимодействия между плоскостями, равный

$$r = \frac{\bar{r}}{1 - \bar{r}} = \left|r\right|\ell^{\,i\varphi}\,,\ \bar{r} = i\,2\pi\,N_{x\,y}\,\alpha\,, \qquad (2)$$

$$\left|r\right| = \frac{\left|\bar{r}\right|}{\sqrt{1 + \left|\bar{r}\right|^2}}\,, \quad \varphi = arc\,tg\left(-\frac{1}{\left|\bar{r}\right|}\right), \qquad (3)$$

$$\left|r\right| = -Cos(\varphi)\,, \qquad Sin(\varphi) = \sqrt{1 - \left|r\right|^2}\,. \qquad (4)$$

$N_{x\,y}$ – поверхностная плотность расположения диполей на плоскости,

α – поляризуемость атомов,

E_0 – амплитуда внешней электрической плоской волны,

$E_l(z_l)$ – амплитуда электрической волны, источником которой является переизлучающая плоскость l, расположенная в точке z_l.

Решение системы уравнений (1) дает значение амплитуды электрической волны для любого плоского излучателя, расположенного в пределах рассматриваемой системы $z_1 \le z_l \le z_p$, где p– количество условных переизлучающих плоскостей. Парциальные волны от плоского переизлучающего источника распространяются в пространстве со скоростью света в вакууме в двух противоположных направлениях от источника. При этом в работах [1], [2] было показано выполнение закона сохранения потоков энергии для одной переизлучающей плоскости и для резонатора, состоящего из двух переизлучающих плоскостей. В связи с этим, оптическую среду можно представить в виде многорезонаторной системы или полирезонатора, состоящего из p плоских зеркал (переизлучающих плоскостей).

Модель взаимодействия электрического поля с веществом названа в данной работе микроструктурной в связи с тем, что основная система уравнений (1) записана для амплитуд волн переизлучающих плоскостей (атомов или диполей, объединенных в структуру плоскости), а не для амплитуд волн отдельных переизлучающих диполей, как это сделано в работе (3), название которой – микроскопическая модель взаимодействия.

Для наглядности выпишем систему уравнений, связывающую амплитуды парциальных волн отдельных источников переизлучения, для четырех плоскостей, считая, что расстояние между любыми соседними плоскостями равно $\left|z_j - z_{j+1}\right| = \Delta z + mk\lambda$. Из соотношения (1) имеем:

$$\begin{aligned}
E_1 &= r\left[E_o + E_2\,\ell^{i\theta} + E_3\,\ell^{2i\theta} + E_4\,\ell^{3i\theta}\right],\\
E_2 &= r\left[E_0\,\ell^{i\theta} + E_1\,\ell^{i\theta} + E_3\,\ell^{i\theta} + E_4\,\ell^{2i\theta}\right],\\
E_3 &= r\left[E_0\,\ell^{2i\theta} + E_1\,\ell^{2i\theta} + E_2\,\ell^{i\theta} + E_4\,\ell^{i\theta}\right],\\
E_4 &= r\left[E_0\,\ell^{3i\theta} + E_1\,\ell^{3i\theta} + E_2\,\ell^{2i\theta} + E_3\,\ell^{i\theta}\right],
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\theta = k\,\Delta z$.

Решить систему уравнений (5) можно прямой подстановкой. Систему уравнений для произвольно большого числа плоскостей решить прямой подстановкой невозможно.

Систему уравнений (5) в случае произвольного числа плоскостей можно записать в следующей форме

$$E_l = rE_0\, \ell^{(l-1)i\theta} + r\sum_{j=1}^{p-l} E_{l+j}\, \ell^{ji\theta} + r\sum_{j=1}^{l-1} E_{l-j}\, \ell^{ji\theta}, \tag{6}$$

где p – количество плоскостей переизлучения,

j – индекс суммирования,

l – номер плоскости переизлучения.

Формы записи (1) и (6) эквивалентны. В правой части (6) выделены две суммы, ответственные за переизлучение в обратном направлении и прямом.

Решить систему уравнений (6) можно несколькими методами. При условии, что $p >> 1$ целесообразно обратиться к дифференциальному и интегральному исчислению. Кратко изложим последовательность действий при решении системы уравнений этим методом. Из системы уравнений (6) путем замены индексов $l \to l-1$ и $l \to l+1$ находим следующие приращения.

$$\begin{aligned} &E_{l+1}(z_{l+1}) - E_l(z_l) = \Delta^{+}E_l(z_l), \\ &E_l(z_l) - E_{l-1}(z_{l-1}) = \Delta^{-}E_l(z_l), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\Delta E_l(z_l) = \frac{1}{2}\left[\Delta^{+}E_l(z_l) + \Delta^{-}E_l(z_l)\right], \\ &\Delta^2 E_l(z_l) = \Delta^{+}E_l(z_l) - \Delta^{-}E_l(z_l). \end{aligned} \tag{8}$$

С использованием преобразований

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{p-l-1} E_{l+1+j}\, \ell^{ji\theta} = \ell^{-i\theta}\sum_{j=1}^{p-l} E_{l+j}\, \ell^{ji\theta} - E_{l+1}, \\ &\sum_{j=1}^{p-l+1} E_{l-1+j}\, \ell^{ji\theta} = \ell^{i\theta}\sum_{j=1}^{p-l} E_{l+j}\, \ell^{ji\theta} + E_l\, \ell^{i\theta}, \\ &\sum_{j=1}^{l} E_{l+1-j}\, \ell^{ji\theta} = \ell^{i\theta}\sum_{j=1}^{l-1} E_{l-j}\, \ell^{ji\theta} + E_l\, \ell^{i\theta}, \\ &\sum_{j=1}^{l-2} E_{l-1-j}\, \ell^{ji\theta} = \ell^{-i\theta}\sum_{j=1}^{l-1} E_{l-j}\, \ell^{ji\theta} - E_{l-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

средние значения (8) приращений амплитуд парциальных волн, вычисленные для произвольной плоскости z_l , имеют следующие функциональные зависимости.

$$\Delta E_l(z_l) = iSin(\theta)\frac{r}{1+r}E_0\,\ell^{(l-1)i\theta} - iSin(\theta)\frac{r}{1+r}\sum_{j=1}^{p-l}E_{l+j}\,\ell^{ji\theta} +$$

$$+ iSin(\theta)\frac{r}{1+r}\sum_{j=1}^{l-1}E_{l-j}\,\ell^{ji\theta}, \tag{10}$$

$$\Delta^2 E_l(z_l) = -2(1-Cos(\theta))E_l(z_l) + 2(\ell^{i\theta}-1)\frac{r}{1+r}E_l(z_l), \tag{11}$$

где $z_l = (l-1)\Delta z = \dfrac{l-1}{p-1}L,$

L –толщина слоя среды, (12)

$\theta = k\Delta z$.

В оптическом диапазоне $k\Delta z << 1$, или $\lambda >> \Delta z$. Поделим соотношение (11) на $(\Delta z)^2$ и, ограничиваясь первыми членами разложения $Sin(\theta), Cos(\theta)$ и $\ell^{i\theta}$, когда

$$2\frac{1-Cos(\theta)}{(\Delta z)^2} \approx k^2, \quad \frac{Sin(\theta)}{\Delta z} \approx k, \quad \frac{\ell^{i\theta}-1}{\Delta z} \approx ik, \tag{13}$$

получим

$$\frac{d^2}{(dz)^2}E_l(z_l) + (k^2 + 2kk')E_l(z_l) = 0, \tag{14}$$

где $k' = -i\dfrac{r}{1+r}\dfrac{1}{\Delta z} = -\dfrac{\overline{\overline{i\ r}}}{\Delta z} = 2\pi k N_{xy}\alpha\dfrac{1}{\Delta z} = \dfrac{2\pi k\alpha}{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z} = 2\pi k N\alpha.$ (15)

N – объемная плотность атомов оптической среды.

Уравнения (6), (10) после ряда преобразований можно привести к интегральному виду.

$$E_l(z_l) = iAE_0\,\ell^{ikz_l} + ik'\,\ell^{-ikz_l}\int\limits_{z_l}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ikz_j}\,dz_j + \\ + ik'\,\ell^{ikz_l}\int\limits_{z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{-ikz_j}\,dz_j, \qquad (16)$$

$$\frac{d}{dz_l}E_l(z_l) = -AkE_0\,\ell^{ikz_l} + kk'\,\ell^{-ikz_l}\int\limits_{z_l}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ikz_j}\,dz_j - \\ - kk'\,\ell^{ikz_l}\int\limits_{z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{-ikz_j}\,dz_j, \qquad (17)$$

где $A = k'\,\Delta z, \quad \Delta z = z_{l+1} - z_l$. (18)

Переход от сумм к интегралам и дифференциалам является всего лишь математическим приемом, облегчающим решение поставленной задачи. Сущность рассматриваемых явлений остается неизменной.

Интегральные уравнения (14), (16), (17) также можно получить непосредственно из уравнения (1) следующим образом. Уравнение (1) можно записать и преобразовать так

$$(1+r)\,E_l(z_l) = rE_0\,\ell^{ikz_l} + r\,\ell^{ikz_l}\sum_{z_j=z_1}^{z_{l-1}} E_j(z_j)\,\ell^{-ikz_j} + rE_l(z_l) + \\ r\,\ell^{-ikz_l}\sum_{z_j=z_1}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ikz_j},$$

$$E_l(z_l) = \frac{r}{1+r}E_0\,\ell^{ikz_l} + \frac{r}{1+r}\ell^{ikz_l}\sum_{z_j=z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{-ikz_j} + \\ + \frac{r}{1+r}\ell^{-ikz_l}\sum_{z_j=z_{l+1}}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ikz_j}. \qquad (19)$$

Из уравнения (19) путем непосредственного перехода от сумм к интегралам и используя соотношение (15) легко получается уравнение (16).

Уравнение (17) легко получить прямым дифференцированием уравнения (16). Уравнение (14) получается прямым дифференцированием уравнения (17).

Результат решения дифференциального уравнения (14) следующий

$$E_l(z_l) = C_1 \ell^{-ik\sqrt{1+2\frac{k'}{k}}z_l} + C_2\, \ell^{ik\sqrt{1+\frac{k'}{k}}z_l}, \qquad (20)$$

Для сокращения последующих записей введем обозначение

$$u = \sqrt{1+2\frac{k'}{k}} = \sqrt{1+4\pi N\alpha}. \qquad (21)$$

Константы C_1 и C_2 непосредственно следуют из решения уравнения (14) и обычно определяются из дополнительных начальных условий. В качестве этих условий можно использовать уравнения (16) и (17). Последнее уравнение выводится из первого путем его дифференцирования, поэтому достаточно применить одно из них. Подставив решение (20) в уравнение (16), после вычисления интегралов получим четыре группы слагаемых при различных экспонентах $\ell^{ikz_l}, \ell^{-ikz_l}, \ell^{ikuz_l}, \ell^{-ikuz_l}$. Вычисляем следующие интегралы

$$\int_{z_l}^{L}\left(C_1\,\ell^{-ikuz_j} + C_2\,\ell^{ikuz_j}\right)\ell^{ikz_j}\,dz_j = \frac{C_1}{ik(1-u)}\left(\ell^{ik(1-u)L} - \ell^{ik(1-u)z_l}\right) + \frac{C_2}{ik(1+u)}\left(\ell^{ik(1+u)L} - \ell^{ik(1+u)z_l}\right), \qquad (22)$$

$$\int_{0}^{z_l}\left(C_1\,\ell^{-ikuz_j} + C_2\,\ell^{ikuz_j}\right)\ell^{-ikz_j}\,dz_j = \frac{C_1}{-ik(1+u)}\left(\ell^{-ik(1+u)z_l} - 1\right) + \frac{C_2}{-ik(1-u)}\left(\ell^{-ik(1-u)z_l} - 1\right).$$

Подставив соотношения (20), (22) в уравнение (16), получим

$$C_1 \ell^{-iukz} + C_2 \ell^{iukz} = iAE_0 \ell^{ikz} + ik' \ell^{-ikz} \frac{C_1}{ik(1-u)} (\ell^{ik(1-u)L} -$$

$$-\ell^{ik(1-u)z}) + ik' \ell^{-ikz} \frac{C_2}{ik(1+u)} (\ell^{ik(1+u)L} - \ell^{ik(1+u)z}) +$$

$$+ik' \ell^{ikz} \frac{C_1}{-ik(1+u)} (\ell^{-ik(1+u)z} - 1) +$$

$$+ik' \ell^{ikz} \frac{C_2}{-ik(1-u)} (\ell^{-ik(1-u)z} - 1). \tag{23}$$

Из уравнения (23) можно выделить группу слагаемых при экспонентах. Каждая группа независимо от других групп слагаемых должна равняться нулю, т.к. уравнение (23) должно выполняться при любых значениях координаты плоскости z_l в пределах $0 \le z_l \le L$. В результате будет получено четыре уравнения.

$$\ell^{-ikuz} C_1 (1 + \frac{k'}{k(1-u)} + \frac{k'}{k(1+u)}) = 0,$$

$$\ell^{ikuz} C_2 (1 + \frac{k'}{k(1-u)} + \frac{k'}{k(1+u)}) = 0, \tag{24}$$

$$\ell^{ikz} (iAE_0 + \frac{C_1 k'}{k(1+u)} + \frac{C_2 k'}{k(1-u)}) = 0 \tag{25}$$

$$\ell^{-ikz} (\frac{C_1 k'}{k(1-u)} \ell^{ik(1-u)L} + \frac{C_2 k'}{k(1+u)} \ell^{ik(1+u)L}) = 0 \tag{26}$$

Из первых двух равенств (24) находится соотношение, тождественное равенству (21)

$$\frac{k'}{k} = \frac{u^2 - 1}{2}$$

Из равенства (26) находится соотношение между константами

$$C_2 = -C_1 \frac{1+u}{1-u} \ell^{-2ikuL} \tag{27}$$

Подставив функциональную зависимость (27) в соотношение (25), получим равенство для константы C_1

$$(1-u) iAE_0 \ell^{ikuL} - C_1 \frac{k'}{k} \left(\frac{1-u}{1+u} \ell^{-ikuL} - \frac{1-u}{1+u} \ell^{ikuL} \right) = 0 \tag{28}$$

Из соотношений (27), (28) находим значения констант

$$C_1 = iA \frac{k}{k'} E_0 \frac{1-u}{D} \ell^{ikuL} \quad , \tag{29}$$

$$C_2 = iA \frac{k}{k'} E_0 \frac{1+u}{D} \ell^{-ikuL} \quad , \tag{30}$$

здесь введено обозначение для знаменателя

$$D = \frac{1+u}{1-u} \ell^{-ikuL} - \frac{1-u}{1+u} \ell^{ikuL} \quad . \tag{31}$$

Подставив значения констант (29), (30) в функциональную зависимость (20) и воспользовавшись соотношениями (15), (18), (21) получим функциональную зависимость для амплитуд парциальных волн. Источниками этих электрических волн являются совокупность диполей, расположенных в одной плоскости с координатой z_l. Значения амплитуд являются функциями параметров, которые характеризуют всю систему переизлучения в целом :

$$\Delta z = z_{l+1} - z_l \,, \quad L = z_p - z_1 \,, \quad u, \quad k, \quad E_0 \,.$$

$$E_l(z_l) = E_0 \frac{ik\Delta z}{D} \left[(1-u) \ell^{iku(L-z_l)} - (1+u) \ell^{-iku(L-z_l)} \right]. \tag{32}$$

Волны от источника переизлучения распространяются в двух противоположных направлениях со скоростью света в вакууме. Электрическое поле, создаваемое парциальной волной от отдельного источника с координатой z_l в пространстве и во времени имеет следующую зависимость.

$$E_l^{\oplus} = E_l(z_l)\,\ell^{-ikz_l}\ \ell^{-i(\omega t-kz)}, \quad z > z_l, \tag{33}$$

$$E_l^{\otimes} = E_l(z_l)\,\ell^{ikz_l}\ \ell^{-i(\omega t+kz)}, \quad z < z_l, \tag{34}$$

где значения $E_l(z_l)$ следует подставить из соотношения (32).

При соблюдении условий установившегося процесса, в котором учтены все обратные связи между условными плоскими источниками переизлучения, вклад в суммарное (измеряемое) электрическое поле волны прямого направления вносят источники, расположенные слева от плоскости наблюдения, а вклад в суммарное электрическое поле волны обратного направления вносят источники, расположенные справа от плоскости наблюдения. Это утверждение является аксиомой, не требующей доказательства.

$$E_l^{+} = E_0\ell^{ikz_l} + \sum_{z_j=z_1}^{z_l} E_j(z_j)\,\ell^{ik(z_l-z_j)}, \tag{35}$$

$$E_{l+1}^{-} = \sum_{z_j=z_{l+1}}^{z_p} E_j(z_j)\,\ell^{ik(z_j-z_{l+1})}, \tag{36}$$

где значения амплитуд волн источников переизлучения $E_j(z_j)$ необходимо брать из формулы (32).

С вычислением суммарных измеряемых полей (35), (36) будет решена задача микроструктурной модели взаимодействия волн электрического поля со средой, представленной в виде пластины толщиной L для случая нормального падения электрической волны на пластину. Это будет сделано в следующей статье.

Литература

1. Косинский Ю.И., Принцип переизлучения электрического поля на диполях в стационарных электрических явлениях, а также магнитных и оптических явлениях, 11, (2002).
2. Косинский Ю.И., Резонаторная система из переизлучающих плоских решеток, в узлах которых расположены диполи, 1–8, (2002).
3. М.Борн, Э. Вольф, Основы оптики, 125–126, (1970).