Косинский Ю.И.

Резонаторная система из переизлучающих плоских решеток , в узлах которых расположены диполи

В работе [1] было выведена система уравнений для амплитуд волн совокупности плоских источников переизлучения, возбуждаемых плоским фронтом внешней электромагнитной волны.

$$E_l\,(z_l\,) = r\,E_0\,\ell^{\,i\,k\,z_l} + r\sum_{\substack{z_j = z_1 \\ z_j \neq z_l}}^{z_p}{}' E_j\,(z_j\,)\,\ell^{\,i\,k\left|z_l - z_j\right|}, \qquad (1)$$

где r – эффективный коэффициент диполь–дипольного взаимодействия между плоскостями, равный

$$r = \frac{\overline{\overline{r}}}{1 - \overline{\overline{r}}} = \left|r\right|\ell^{\,i\varphi}\,,\ \overline{\overline{r}} = i\,2\pi\,N_{x\,y}\,\alpha\,, \qquad (2)$$

$$\left|r\right| = \frac{\left|\overline{\overline{r}}\right|}{\sqrt{1 + \left|\overline{\overline{r}}\right|^2}}, \quad \varphi = arc\,tg\left(-\frac{1}{\left|\overline{\overline{r}}\right|}\right), \qquad (3)$$

$$\left|r\right| = -Cos(\varphi)\,, \qquad Sin(\varphi) = \sqrt{1 - \left|r\right|^2}\,. \qquad (4)$$

$N_{x\,y}$ – поверхностная плотность расположения диполей на плоскости,

α – поляризуемость атомов,

E_0 – амплитуда внешней электрической плоской волны,

$E_l\,(z_l)$ – амплитуда электрической волны, источником которой является переизлучающая плоскость l, расположенная в точке z_l.

Решение системы уравнений (1) дает значение амплитуды электрической волны для любого плоского излучателя, расположенного в пределах рассматриваемой системы $z_1 \le z_l \le z_p$, где p– количество условных переизлучающих плоскостей. Парциальные волны от плоского переизлучающего источника распространяются в пространстве со скоростью света в вакууме в двух противоположных направлениях от источника.

При соблюдении условий установившегося процесса, в котором учтены все обратные связи между условными плоскими источниками переизлучения, вклад в суммарное (измеряемое) электрическое поле волны прямого направления вносят источники, расположенные слева от плоскости наблюдения, а вклад в суммарное электрическое поле волны обратного направления вносят источники, расположенные справа от плоскости наблюдения.

$$E_l^{+} = E_0 \ell^{i k z_l} + \sum_{z_j = z_1}^{z_l} E_j(z_j)\, \ell^{\, i k (z_l - z_j)}, \tag{5}$$

$$E_{l+1}^{-} = \sum_{z_j = z_{l+1}}^{z_p} E_j(z_j)\, \ell^{\, i k (z_j - z_{l+1})}. \tag{6}$$

Принцип справедлив для любой плоскости наблюдения как внутри среды, так и за ее пределами. Каждый источник переизлучения характеризуется амплитудой парциальной электрической волны $E_j(z_j)$, значение которой непосредственно находится из системы уравнений (1).

Для выяснения основных особенностей и возможностей применения рассматриваемой модели, а также с целью детального исследования тех прцессов, которые она может описывать, представим среду в виде оптического плоского резонатора, состоящего из двух переизлучающих плоскостей (Рис.1(А,Б)). Согласно (1) запишем систему уравнений для амплитуд.

$$E_1(z_1) = r\, E_0\, \ell^{\, i k z_1} + r\, E_2(z_2)\, \ell^{\, i k (z_2 - z_1)}, \tag{7}$$

$$E_2(z_2) = r\, E_0\, \ell^{i k (z_2 - z_1)} + r\, E_1(z_1)\, \ell^{\, i k (z_2 - z_1)}. \tag{8}$$

Представим $(z_2 - z_1) = \Delta z + n k \lambda$, при $z_1 = 0$ имеем

$$E_1(z_1) = r\, E_0 + r\, E_2(z_2)\, \ell^{\, i k \Delta z}, \tag{9}$$

$$E_2(z_2) = r\, E_0\, \ell^{\, i k \Delta z} + r\, E_1(z_1)\, \ell^{\, i k \Delta z}. \tag{10}$$

Изменение расстояния между переизлучающими плоскостями на целое число длин волн не вносит изменений в систему уравнений (9), (10) и, соответственно, не повлияет на величину амплитуд волн источников переизлучения E_1 и E_2. Решение системы (9), (10) дает следующие соотношения (Рис.1(А)).

$$E_1 = E_0 \frac{r(1 + r\,\ell^{\,i\,2k\,\Delta z})}{1 - r^2\,\ell^{\,i\,2k\,\Delta z}}\,, \qquad (11)$$

$$E_2 = E_0 \frac{r(1 + r)\,\ell^{\,i\,k\,\Delta z}}{1 - r^2\,\ell^{\,i\,2k\,\Delta z}}\,. \qquad (12)$$

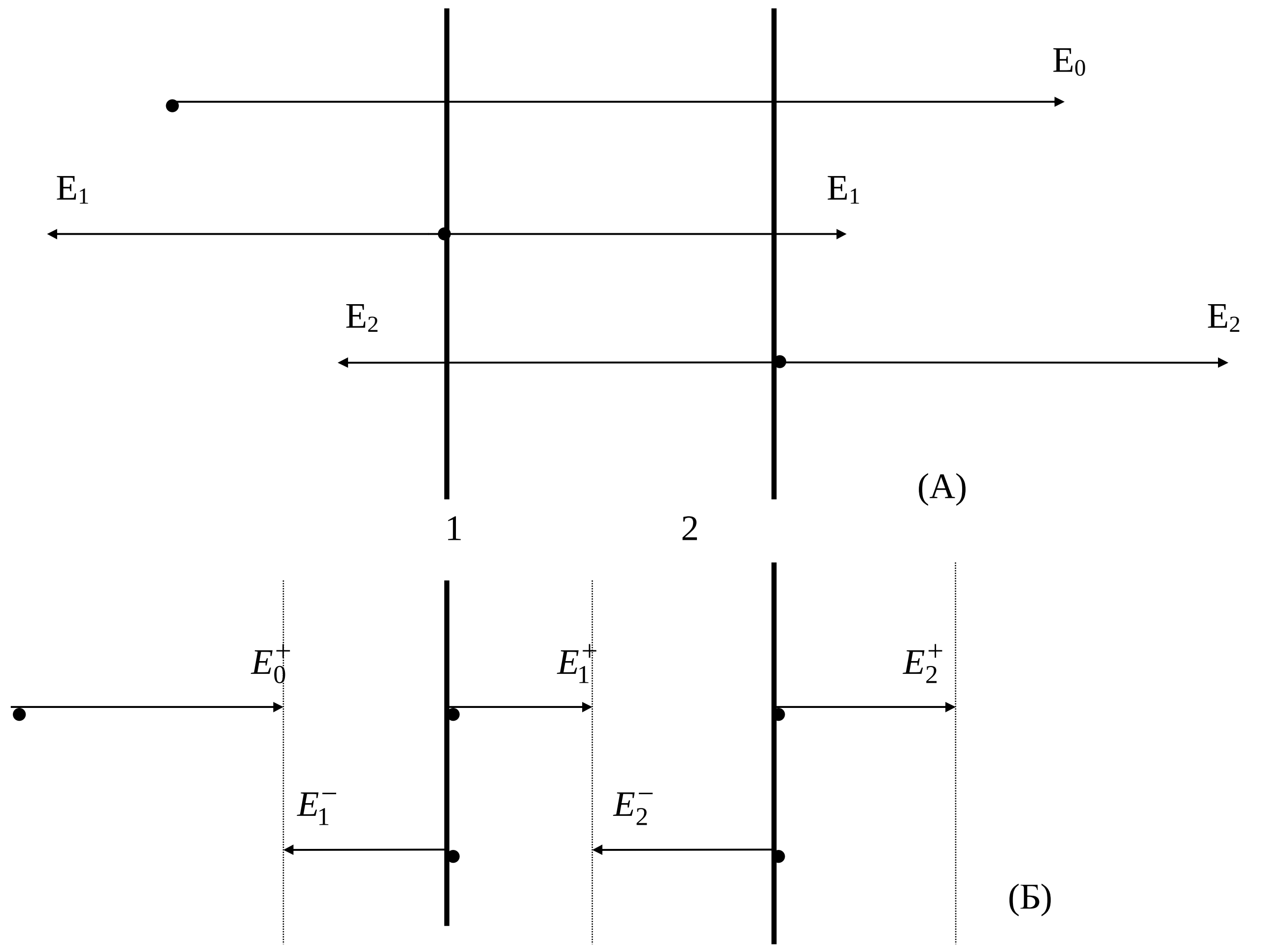

Рис.1

Амплитуды встречных волн суммарного или наблюдаемого электрического поля, существующего в вакуумных промежутках между плоскостями, находятся из соотношений (5), (6).Рис.1(Б).

Амплитуда волны перед первой плоскостью в положительном направлении:

$$E_0^+ = E_0 \ . \tag{13}$$

Амплитуда волны перед первой плоскостью в отрицательном направлении:

$$E_1^- = E_1 + E_2 \,\ell^{ik\Delta z} = E_0 \frac{r(1+(1+2r)\,\ell^{2ik\,\Delta z}}{1-r^2\,\ell^{2ik\Delta z}} . \tag{14}$$

Амплитуда волны между плоскостями в положительном направлении:

$$E_1^+ = E_0 + E_1 = E_0 \frac{1+r}{1-r^2\,\ell^{2ik\Delta z}} . \tag{15}$$

Амплитуда волны между плоскостями в отрицательном направлении:

$$E_2^- = E_2 = E_0 \frac{r(1+r)}{1-r^2\,\ell^{2ik\Delta z}}\,\ell^{ik\Delta z} . \tag{16}$$

Амплитуда волны за второй плоскостью в положительном направлении:

$$E_2^+ = (E_0 + E_1)\,\ell^{ik\Delta z} + E_2 = E_0 \frac{(1+r)^2}{1-r^2\,\ell^{2ik\Delta z}}\,\ell^{ik\Delta z} . \tag{17}$$

Каждая из волн с амплитудой (13) – (17) переносит электромагнитную энергию. Потоки энергии равны соответственно:

$$S_0^+ = \frac{c}{4\pi}\left|E_0\right|^2, \qquad S_1^- = \frac{c}{4\pi}\left|E_1^-\right|^2, \tag{18}$$

$$S_1^+ = \frac{c}{4\pi}\left|E_1^+\right|^2, \qquad S_2^- = \frac{c}{4\pi}\left|E_2^-\right|^2, \tag{19}$$

$$S_2^+ = \frac{c}{4\pi}\left|E_2^+\right|^2 . \tag{20}$$

Закон сохранения потока энергии утверждает:

$$S_0^+ - S_1^- = S_2^+ , \tag{21}$$

$$S_1^+ - S_2^- = S_2^+. \qquad (22)$$

Учитывая (19) –(20), соотношения (20) –(21) запишутся

$$\left|E_0^+\right|^2 - \left|E_1^-\right|^2 = \left|E_2^+\right|^2, \qquad (23)$$

$$\left|E_1^+\right|^2 - \left|E_2^-\right|^2 = \left|E_2^+\right|^2. \qquad (24)$$

Подставив соотношения (13) –(17) в зависимости, следующие из закона сохранения энергии (23) –(24), получим тождества в случае выполнения закона сохранения энергии.

$$\left|1 - r^2\, \ell^{\,2ik\,\Delta z}\right|^2 - \left|r(1 + (1+2r)\,\ell^{\,2ik\,\Delta z})\right|^2 = \left|(1+r)^2\right|^2, \qquad (25)$$

$$\left|1+r\right|^2 - \left|r(1+r)\right|^2 = \left|(1+r)^2\right|^2. \qquad (26)$$

Докажем, что соотношение (25) – тождество, используя функциональные зависимости (2) – (4).

$$\begin{gathered}\left|1 - r^2\, \ell^{\,2ik\,\Delta z}\right|^2 = 1 + |r|^4 - 2|r|^2 Cos(2\varphi + 2k\,\Delta z),\\ Cos(2\varphi + 2k\,\Delta z) = (2|r|^2 - 1)Cos(2k\,\Delta z) + 2|r|\sqrt{1-|r|^2}\,Sin(2k\,\Delta z).\end{gathered} \qquad (27)$$

$$\begin{gathered}\left|r(1 + (1+2r)\,\ell^{\,2ik\,\Delta z})\right|^2 = |r|^2(1 + |1+2r|^2 + 2Cos(2k\,\Delta z) + 4|r|Cos(\varphi + 2k\,\Delta z)) =\\ = |r|^2(2 + 2Cos(2k\,\Delta z) + 4|r|Cos(\varphi + 2k\,\Delta z)),\\ Cos(\varphi + 2k\,\Delta z) = -|r|Cos(2k\,\Delta z) - \sqrt{1-|r|^2}\,Sin(2k\,\Delta z).\end{gathered} \qquad (28)$$

$$\left|(1+r)^2\right|^2 = (|1+r|^2)^2 = (1 + |r|^2 + 2|r|Cos(\varphi))^2 = 1 - 2|r|^2 + |r|^4. \qquad (29)$$

Подставив функционалоные зависимости (27) – (29) в соотношение (25), получим тождество.

$$1+|r|^4-2|r|^2 \equiv 1-2|r|^2+|r|^4. \qquad (30)$$

Аналогично докажем, что соотношение (26) – тождество, используя функциональные зависимости (2) – (4).

$$|1+r|^2 = 1+|r|^2+2|r|Cos(\varphi) = 1-|r|^2, \qquad (31)$$

$$|r(1+r)|^2 = |r|^2(1-|r|^2). \qquad (32)$$

Подставив функциональные зависимости (31). (32), (29) в соотношение (26), получим тождество (30).

Таким образом, для амплитуд полей (13), (17), найденных для плоского резонатора, состоящего из двух переизлучающих плоскостей, в которых расположены диполи, возбуждаемые плоским фронтом внешней электрической волны, закон сохранения потока энергии (21), (22) выполняется, что говорит о правильности всех найденных функциональных зависимостей.

Как в любом резонаторе, в рассматриваемом резонаторе существует резонанс, когда амплитуда электрического поля волны внутри резонатора достигает максимального значения. Это достигается при минимальном значении знаменателя в функциональных зависимостях (14), (17) для амплитуд волн резонатора.

$$\begin{aligned} &1-r^2\,\ell^{\,2ik\,\Delta z} = 1-|r|^2\,\ell^{\,2i\varphi+2ik\,\Delta z} = 1-|r|^2, \\ &2\varphi+2k\,\Delta z = 2q\pi, \quad \varphi = \pi - k\,\Delta z, \quad k\,\Delta z = \pi-\varphi, \end{aligned} \qquad (33)$$

где q – порядковый номер резонанса.

При значениях фазы (33) имеем

$$\begin{aligned} &Cos(k\,\Delta z) = -Cos(\varphi) = |r|, \quad Sin(k\,\Delta z) = Sin(\varphi) = \sqrt{1-|r|^2}, \\ &Cos(2k\,\Delta z) = 2|r|^2-1, \quad Cos(\varphi+2k\,\Delta z) = Cos(\pi+k\,\Delta z) = \\ &= -Cos(k\,\Delta z) = Cos(\varphi) = -|r|. \end{aligned} \qquad (34)$$

Числители функциональных зависимостей (14), (17) в резонансе имеют значения:

$$\left| r(1+(1+2r)\,\ell^{\,2ik\Delta z}) \right| = |r|^2 (2+2Cos(2k\,\Delta z)+4|r|Cos(\varphi+2k\,\Delta z)) = 0,$$

$$|1+r|^2 = 1-|r|^2,$$

$$|r(1+r)|^2 = |r|^2(1-|r|^2), \tag{35}$$

$$\left|(1+r)^2\right|^2 = (1-|r|^2)^2.$$

Используя соотношения (13), (17) ,(34), (35) в резонансе получаем следующие характеристики резонатора:

Резонатор в резонансе отражает всегда

$$\frac{\left|E_1^-\right|^2}{|E_0|^2} = 0. \tag{36}$$

Волна внутри резонатора в положительном направлении, всегда больше единицы

$$\frac{\left|E_1^+\right|^2}{|E_0|^2} = \frac{1}{1-|r|^2}. \tag{37}$$

Волна внутри резонатора в отрицательном направлении

$$\frac{\left|E_2^-\right|^2}{|E_0|^2} = \frac{|r|^2}{1-|r|^2}. \tag{38}$$

Амплитуда волны   на выходе резонатора в резонансе всегда равна единице

$$\frac{\left|E_2^+\right|^2}{|E_0|^2} = 1. \tag{39}$$

И наконец, амплитеды волн (11), (12), которые излучаются в обе стороны переизлучающими плоскостями резонатора в резонансе, равны

$$\frac{|E_1|^2}{|E_0|^2} = \frac{|E_2|^2}{|E_0|^2} = \frac{|r|^2}{1-|r|^2}. \tag{40}$$

Аналогом [2] рассматриваемого резонатора по отраженной волне и волне на выходе может служить из оптически прозрачного материала пластина толщиной

$$L = \frac{\lambda}{2n}, \tag{41}$$

где λ – длина волны излучения в вакууме,

n – показатель преломления среды.

Это говорит о том, что оптически прозрачную среду в электрическом поле волн можно представить в виде набора бесконечных плоских сеток, в узлах которых расположены переизлучающие диполи. Плоские сетки с набором диполей представляют собой условные переизлучающие плоскости, расстояние между которыми равно d– постоянной решетки среды. Такая среда, состоящая из p=L/d условных переизлучающих плоскостей, для плоской электромагнитной волны представляет собой сложный резонатор из условных переизлучающих плоскостей, рассмотренных выше, или полирезонатор, в котором могут наблюдаться сложные резонансные явления.

Литература

1. Ю.И. Косинский, Принцип переизлучения электрического поля на диполях в стационарных электрических явлениях, а также магнитных и оптических явлениях, 11, (2002).

2. М.Борн, Э.Вольф, Основы оптики, 87, (1970)