Косинский Ю.И.

3. Сферический маятник

На шаре радиуса R_0, надетом на ось, массой M закреплена материальная точка массой m на расстоянии R_0 от оси, на которую действует сила $F = mg$. Начальные условия следующие: шар и материальная точка имеют на поверхности сферы начальную скорость υ_0, материальная точка находится под углом α_0 относительно нейтрального положения. Под действием силы на материальную точку шар совершает циклические колебания вокруг оси.

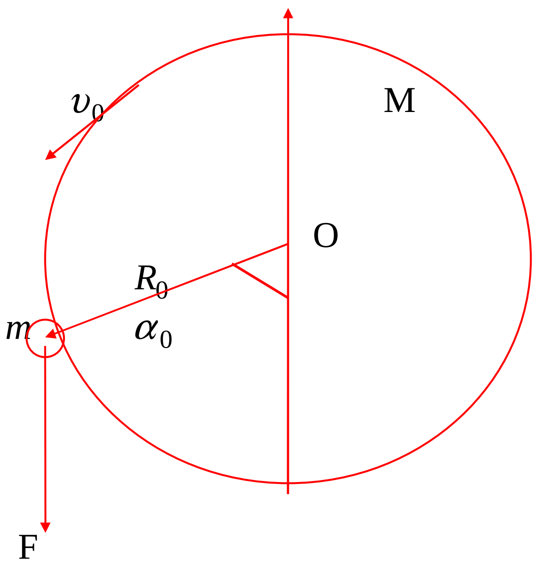

Рис.1

При вращении шара с линейной скоростью υ на его поверхности, кинетическая энергия шара и материальной точки равна

$$W_K = \upsilon^2\left(\frac{M}{5} + \frac{m}{2}\right) \tag{1}$$

Потенциальная энергия материальной точки, за счет которой шар начинает вращаться , уменьшается на эту же величину

$$W_P = W_K = mgR_0(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0)) \tag{2}$$

Из равенства энергий следует соотношение

$$\upsilon^2\left(\frac{M}{5} + \frac{m}{2}\right) = mgR_0(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0)), \tag{3}$$

откуда находится скорость

$$\upsilon^2 = \frac{10}{2M+5m} mgR_0(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0)) \qquad (4)$$

С учетом начальных условий скорость равна

$$\upsilon^2 = \frac{10}{2M+5m} mgR_0(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0)) + \upsilon_0^2 \qquad (5)$$

или

$$\upsilon = \sqrt{\frac{10}{2M+5m} mgR_0} \left(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0) + \upsilon_0^2 \frac{2M+5m}{10mgR_0} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)$$

Выразим линейную скорость на поверхности шара через угловую скорость.

$$\upsilon = -\frac{R_0 \cdot d\alpha}{dt} \qquad (7)$$

Из соотношения (7) следует формула для дифференциала времени

$$dt = -\frac{R_0 \cdot d\alpha}{\upsilon} \qquad (8)$$

Путем подстановки соотношения (6) в (8) и интегрирования равенства (8) найдем период колебания сферического маятника

$$dt = -\sqrt{\frac{2M+5m}{10m}} \cdot \sqrt{\frac{R_0}{g}} \cdot \frac{d\alpha}{\left(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0) + \upsilon_0^2 \frac{2M+5m}{10mgR_0} \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (9)$$

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{2M+5m}{10m}} \cdot \sqrt{\frac{R_0}{g}} \cdot \int_{\alpha_0}^{0} \frac{d\alpha}{\left(Cos(\alpha) - Cos(\alpha_0) + \upsilon_0^2 \frac{2M+5m}{10mgR_0} \right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (10)$$

Сделав преобразования в тригонометрических функциях, получим

$$T = \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot \sqrt{\frac{2M+5m}{2m}} \cdot \sqrt{\frac{R_0}{g}} \cdot \int_{0}^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\left(Sin^2(\frac{\alpha_0}{2}) - Sin^2(\frac{\alpha}{2}) + B \right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (11)$$

где

$$B = \upsilon_0^2 \frac{2M+5m}{20mgR_0}, \qquad (12)$$

$$\upsilon_0 = \left(\frac{B \cdot 20mgR_0}{2M+5m} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (15)$$