Косинский Ю.И.

1. Кинетическая энергия вращающегося шара

Известно [1], что кинетическая энергиия равномерно движущегося со скоростью υ тела массой m равна

$$W_K = \frac{m \cdot \upsilon^2}{2}. \qquad (1)$$

Формула для кинетической энергии вращяющегося с угловой скоророcтью $\frac{d\alpha}{dt}$ радиуса R_0 шара массой M в литературе отсутствует (например, кинетическая энергия суточного вращения земного шара).

Поэтому приведем подробный вывод этой формулы. Для этого выпишем некоторые известные формулы, которые будут использованы при выводе.

Элементарные объемы dV_i (в сферической системе координат) с массой m_i вращающегося шара с угловой скоростью $\frac{d\alpha}{dt}$, массой M, радиусом R_0 и плотностью ρ движутся с различной линейной скоростьтю υ_i

$$dV = R^2 \cdot Sin(\theta) \cdot dR \cdot d\theta \cdot d\varphi, \qquad (2)$$

$$m_i = \rho \cdot dV, \qquad (3)$$

$$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_0^3, \qquad (4)$$

$$\upsilon_i(R,\theta) = R \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot Sin(\theta). \qquad (5)$$

Кинетическая энергия всего вращающегося шара складывается с кинетических енерий элементарных масс элементарных объемов всего объема шара

$$W_K = \sum_i \frac{m_i \cdot \upsilon_i^2}{2}. \qquad (6)$$

Подставив в соотношение (6) значения (3), (2), (5), получим

$$W_K = 2\pi \cdot \rho \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \int_0^{R_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cdot Sin^3(\theta) \cdot dR \cdot d\theta. \qquad (7)$$

Умножив и поделив правую часть соотношения (7) на объем шара и сделав некоторые преобразования, применив равенство (4), придем к соотношению

$$W_K = 2\pi \cdot \frac{3}{4\pi} M\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(R_0\right)^2 \cdot \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R}{R_0}\right)^4 \cdot d\left(\frac{R}{R_0}\right) \cdot Sin^3(\theta) \cdot d\theta . \tag{8}$$

Вычислив стандартные интегралы, найдем соотношение для кинетической энергии вращающегося шара, полученное впервые,

$$\begin{gathered} W_K = \frac{3}{2} \cdot M\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(R_0\right)^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \cdot M\left(\frac{d\alpha}{dt} R_0\right)^2 \\ W_K = \frac{M \cdot \upsilon_0^2}{5} \end{gathered} \tag{9}$$

Где υ_0 - максимальная линейная скорость на поверхности вращающегося шара.

Для вращающегося стержня в полярной системе координат известные формулы такие

$$dV = R \cdot dR \cdot d\varphi \cdot dz, \tag{10}$$

$$\upsilon_i = R \frac{d\alpha}{dt}. \tag{11}$$

Применив их, найдем кинетическую энергию вращающегося стержня

$$\begin{aligned} &\sum_i \frac{m_i \cdot \upsilon_i^2}{2} = \pi \cdot \rho \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \cdot z \cdot \int_0^{R_0} R^3 \cdot dR = \\ &= \frac{\pi}{\pi} M\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(R^0\right)^2 \int_0^1 \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \cdot d\left(\frac{R}{R_0}\right) = \\ &= M\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \left(R_0\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{M \cdot \upsilon_0^2}{4} = W_K \end{aligned} \tag{12}$$

Литература

1. Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, Справочник по физике, 63, (1968).