Косинский Ю.И.

Электрическое поле стационарного диполя.

Известно, что электрический диполь [1] образуют два заряда q(+) и q(–), разнесенные на расстояние d друг от друга. Величина диполя характеризуется как произведение величины заряда на расстояние.

$$p=qd$$

Рассмотрим величину и направление электрического поля, которое образует такой диполь, в зависимости от расстояния R от этого диполя и угла наклона α относительно оси диполя.

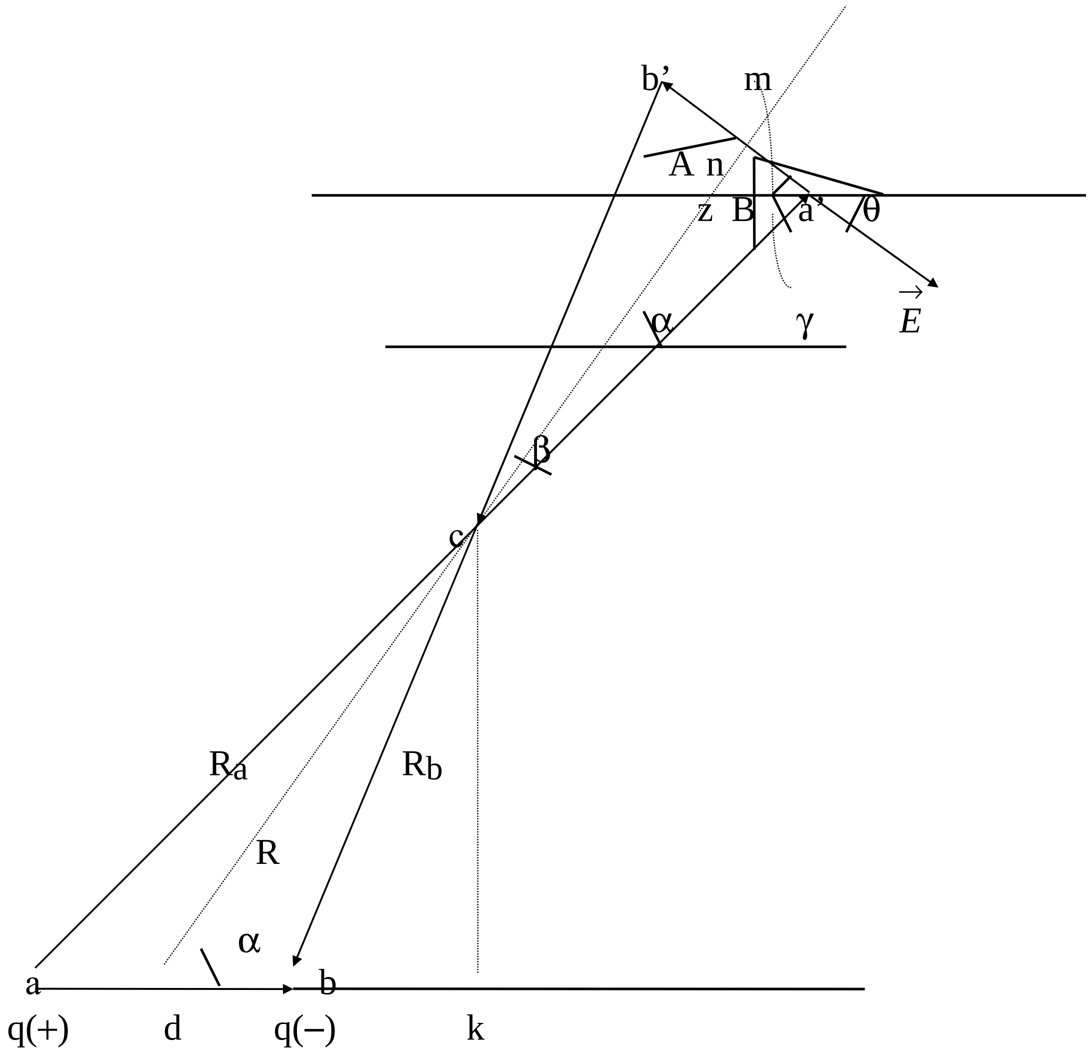

Рис.1

Каждый заряд диполя q(+) и q(–) в точке измерения ‘c’ создает свой вектор электрического поля [1], направленный по радиусу R_a и R_b соответственно, модуль которого обратно пропорционален квадрату радиусов до точки измерения и пропорционален величинам сторон треугольника (рис.1).

$$\left|\vec{E}_+\right| = \frac{q}{\varepsilon} ca', \quad ca' = \frac{1}{R_a^2}, \quad \left|\vec{E}_-\right| = \frac{q}{\varepsilon} cb', \quad cb' = \frac{1}{R_b^2} \quad . \tag{1}$$

Радиусы зарядов диполя в точке измерения выражаются согласно рис.1 через радиус диполя R и угол наклона α таким образом

$$\begin{aligned} R_a &= \sqrt{(ak)^2 + (kc)^2} = \sqrt{(RCos(\alpha) + ad)^2 + (RSin(\alpha))^2} \approx R + adCos(\alpha) \\ R_b &= \sqrt{(bk)^2 + (kc)^2} = \sqrt{(RCos(\alpha) - ad)^2 + (RSin(\alpha)^2} \approx R - adCos(\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

в приближении, что размер диполя намного меньше радиуса точки измерения

$$\frac{2ad}{R} << 1 \tag{3}$$

Найти величину и направление вектора электрического поля $\vec{E}$ диполя в точке измерения значит найти векторную сумму электрических полей зарядов, составляющих диполь. По величине вектор электрического поля диполя в точке измерения пропорционален величине замыкающей стороны $a'b'$ косоугольного треугольника $\Delta(ca'b')$, боковые стороны которого составляют известные величины (1) векторов электрических полей зарядов диполя . Угол β между боковыми сторонами треугольника функционально выражается через общие параметры (R,α) согласно рис.1 следующим образом

$$\begin{aligned} &\beta = \angle ack - \angle bck \\ &\angle ack = arctg\frac{RCos(\alpha) + ad}{RSin(\alpha)} \\ &\angle bck = arctg\frac{RCos(\alpha) - ad}{RSin(\alpha)} \end{aligned} \tag{4}$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} &\beta = arctgx - arctgy = arctg\frac{x-y}{1+xy} = arctg\frac{\dfrac{RCos(\alpha)+ad}{RSin(\alpha)} - \dfrac{RCos(\alpha)-ad}{RSin(\alpha)}}{1 + \dfrac{R^2Cos^2(\alpha) - (ad)^2}{R^2Sin^2(\alpha)}} \\ &\beta = arctg\frac{2adRSin(\alpha)}{R^2 - (ad)^2} \approx arctg\frac{2adSin(\alpha)}{R} \approx \frac{2adSin(\alpha)}{R} \end{aligned} \tag{5}$$

Дальше воспользуемся известными формулами решения косоугольного треугольника [2], когда известны две стороны и угол между ними $\Delta(a,b,C)$ и необходимо найти величину противоположной стороны и оставшиеся два угла $\Delta(c,A,B)$ в обозначениях [2].

$$Tg\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}ctg\frac{C}{2}, \qquad \frac{A+B}{2}=90^0-\frac{1}{2}C,$$
$$c=\frac{aSin(C)}{Sin(A)}. \qquad (6)$$

В обозначениях рис.1

$$a=ca', \quad b=cb', \quad C=\beta, \quad c=a'b', \quad A=A, \quad B=B. \qquad (7)$$

Результат решения таков

$$\frac{A-B}{2}=arctg\frac{\dfrac{1}{(R+adCos(\alpha))^2}-\dfrac{1}{(R-adCos(\alpha))^2}}{\dfrac{1}{(R+adCos(\alpha))^2}+\dfrac{1}{(R-adCos(\alpha))^2}}ctg\frac{1}{2}\frac{2adSin(\alpha)}{R}=$$
$$=arctg\frac{-4adRCos(\alpha)}{2(R^2+(adCos(\alpha))^2)}\frac{Cos(\dfrac{adSin(\alpha)}{R})}{Sin(\dfrac{adSin(\alpha)}{R})}\approx arctg(-2ctg(\alpha))=-arctg2ctg(\alpha) \qquad (8)$$

$$A=90^0-\frac{1}{2}\beta-arctg2ctg(\alpha),$$
$$B=90^0-\frac{1}{2}\beta+arctg2ctg(\alpha), \qquad (9)$$
$$A+B+\beta=180^0.$$

Неизвестная сторона треугольника равна

$$a'b'=c=\frac{\dfrac{1}{(R+adCos(\alpha))^2}Sin(\dfrac{2adSin(\alpha)}{R})}{Sin(90^0-\dfrac{1}{2}\beta+arctg2ctg(\alpha))}\approx\frac{2adSin(\alpha)}{R^3}\frac{1}{Cos(arctg2ctg(\alpha)+\dfrac{1}{2}\beta)} \qquad (10)$$

Распишем подробно функцию знаменателя соотношения (10)

$$Cos(arctg2ctg(\alpha)+\frac{1}{2}\beta)=Cos(arctg2ctg(\alpha))Cos(\frac{1}{2}\beta)-Sin(arctg2ctg(\alpha))Sin(\frac{1}{2}\beta)=$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{1+4Ctg^2(\alpha)}} - \frac{2Ctg(\alpha)}{\sqrt{1+4Ctg^2(\alpha)}}\frac{adSin(\alpha)}{R} \approx \frac{1}{\sqrt{1+4Ctg^2(\alpha)}} \tag{11}$$

Соотношение (11) и все соотношения, найденные выше, были получены в приближении, когда размер диполя намного меньше расстояния до точки измерения

$$\frac{2ad}{R} << 1$$

Учитывая (11), функциональная зависимость для искомой величины стороны треугольника запишется так

$$a'b' = \frac{2adSin(\alpha)}{R^3}\sqrt{1+4Ctg^2(\alpha)} = \frac{2ad}{R^3}\sqrt{Sin^2(\alpha)+4Cos^2(\alpha)} = 2ad\frac{\sqrt{1+3Cos^2(\alpha)}}{R^3} \tag{12}$$

Вектор электрического поля диполя по модулю пропорционален величине (12) и равен (совпадает с [1])

$$\left|\bar{E}\right| = \frac{q}{\varepsilon}a'b' = \frac{q2ad}{\varepsilon}\frac{\sqrt{1+3Cos^2(\alpha)}}{R^3} = \frac{p}{\varepsilon}\frac{\sqrt{1+3Cos^2(\alpha)}}{R^3}. \tag{13}$$

Направление вектора электрического поля диполя составляет угол θ относительно оси диполя. Выразим величину этого угла через основной параметр α. Из треугольника Δ(c z a') найдем величину угла γ.

Угол ∠c z a'=180^0 – α. β/2+∠c z a'+γ=180^0 , γ=α–β/2, γ+m=B, m=B–γ,
n=180^0–m=180^0–B+γ=180^0–90^0+β/2–arctg2ctg(α)+α–β/2=90^0+α–arctg2ctg(α)=
n=α+arcctg2ctg(α), n+θ=π,

$$\theta=\pi-\alpha-\mathrm{arcctg}2ctg(\alpha) \tag{14}$$

Найдем некоторые соотношения в функции угла α

$$\begin{aligned} &Sin(\theta) = -Sin(\alpha + arcctg2ctg(\alpha)) = \\ &= -Sin(\alpha)Cos(arcctg2ctg(\alpha)) - Cos(\alpha)Sin(arcctg2ctg(\alpha)) \\ &Cos(\theta) = -Cos(\alpha + arcctg2ctg(\alpha)) = \\ &= -Cos(\alpha)Cos(arcctg2ctg(\alpha)) + Sin(\alpha)Sin(arcctg2ctg(\alpha)) \end{aligned} \tag{15}$$

При этом воспользуемся известными соотношениями [3]

$$\begin{aligned} Cos(arcctg(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ Sin(arcctg(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned} . \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) следует

$$Sin(\theta) = -3\frac{Cos(\alpha)Sin(\alpha)}{\sqrt{1+3Cos^2(\alpha)}}$$
$$Cos(\theta) = \frac{1-3Cos^2(\alpha)}{\sqrt{1+3Cos^2(\alpha)}} \qquad (17)$$

Соответствующие проекции вектора электрического поля диполя на ось X иY в зависимости от главных параметров примут такую функциональную зависимость

$$E_x = \left|\vec{E}\right| Cos(\theta) = \frac{p}{\varepsilon R^3}\left(1-3Cos^2(\alpha)\right)$$
$$E_y = \left|\vec{E}\right| Sin(\theta) = -\frac{3p}{\varepsilon R^3} Cos(\alpha)Sin(\alpha) \qquad (18)$$

Проекция вектора электрического поля диполя на ось X равна нулю при значении угла α_0 равном

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.75^0. \qquad (19)$$

Известно, что точечный заряд имеет непрерывные силовые линии вектора электрического поля в виде лучей, исходящих из точки нахождения заряда. Представляет интерес найти функцию семейства непрерывных силовых линий вектора электрического поля диполя. За основу возьмем факт, что вектор всегда касателен к непрерывной силовой линии, а за начальную точку отсчета примем угол α_0, от которой будем двигаться вверх и вниз вдоль силовой линии согласно рис.2, рис.3 через приращение угла $d\alpha$.

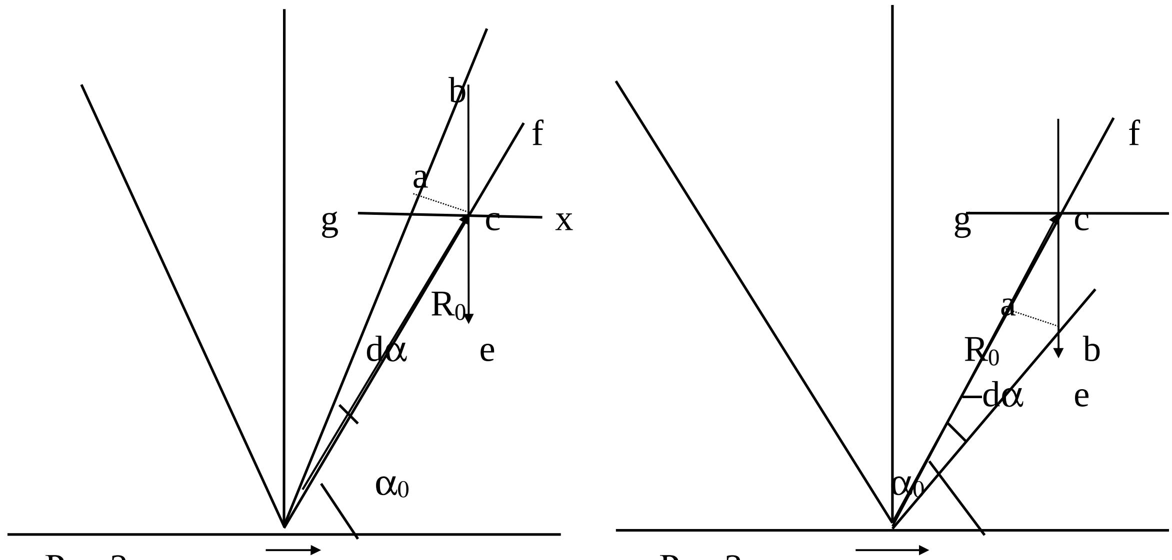

Рис.2 Рис.3

Согласно рис. 2 в точке наблюдения ‘с’ с радиусом R_0 находится вектор электрического поля диполя, касательный к непрерывной силовой линии. Вектор находится под углом θ относительно оси диполя

$$\theta=\angle ecx=\angle gcb \tag{20}$$

Точка наблюдения находится под углом α относительно оси диполя

$$\alpha=\angle gcp \tag{21}$$

Сделаем приращение угла точки наблюдения на величину dα. Радиус точки наблюдения изменится на величину

$$R=R_0+dR=R_0+ab \tag{22}$$

При этом отрезок ас равен

$$ac=R_0\, d\alpha. \tag{23}$$

Отношение отрезков равно

$$\frac{ab}{ac}=tg(\angle acb), \tag{24}$$

откуда следует

$$dR=R_0\, d\alpha\, tg(\angle acb). \tag{25}$$

Найдем величину угла приращения ∠acb.

$$\angle pcb=\angle pcg+\angle gcb=\theta+\alpha \tag{26}$$

$$\angle acb=\angle pcb-\pi/2=\theta+\alpha-\pi/2 \tag{27}$$

Выразим соотношение (25) через основной параметр α

$$tg(\angle acb)=tg(\theta+\alpha-\pi/2)=tg(\pi/2-\mathrm{arcctg}2ctg(\alpha))=ctg(\mathrm{arcctg}2ctg(\alpha))=2ctg(\alpha), \tag{28}$$

$$dR=R_0\, d\alpha\, 2ctg(\alpha). \tag{29}$$

Для произвольного значения угла α соотношение для радиуса непрерывной силовой линии (22) в функции основных параметров (R_0 , α) с учетом соотношения (29) запишется в таком виде

$$R=R_0+2R_0\int_{\alpha_0}^{\alpha} ctg(\alpha)\, d\alpha = R_0+2R_0\ln(Sin(\alpha))\Big|_{\alpha_0}^{\alpha} =$$
$$R=R_0\left(1+2\ln\left(\frac{Sin(\alpha)}{Sin(\alpha_0)}\right)\right). \tag{30}$$

Согласно рис.3 с помощью аналогичных рассуждений при движении вниз от начального угла α_0 для радиуса непрерывной силовой линии получается то же соотношение, что и в (30).

При построении графика в формуле (30) следует учитывать, что начальные условия таковы: $\alpha_0\approx55^0$, а R_0 произвольно. Угол α можно менять при движении вверх в пределах ($\alpha_0\div90$), при движении вниз –в пределах ($\alpha\div30^0$). При движении вниз 0^0 недостижим, так как формула (30) получена в приближении (3). Формула

(30) найдена в полярных координатах. В декартовых координатах с учетом (30) формула примет вид

$$X=R\mathrm{Cos}(\alpha), \qquad Y=R\mathrm{Sin}(\alpha). \tag{31}$$

График функции непрерывной силовой линии (30), (31) электрического поля диполя показан на рис.4 при таких начальных условиях: $\alpha_0=55^0$, $R_0=5.5$. Программа для построения графика составлялась на языке FORTRAN.

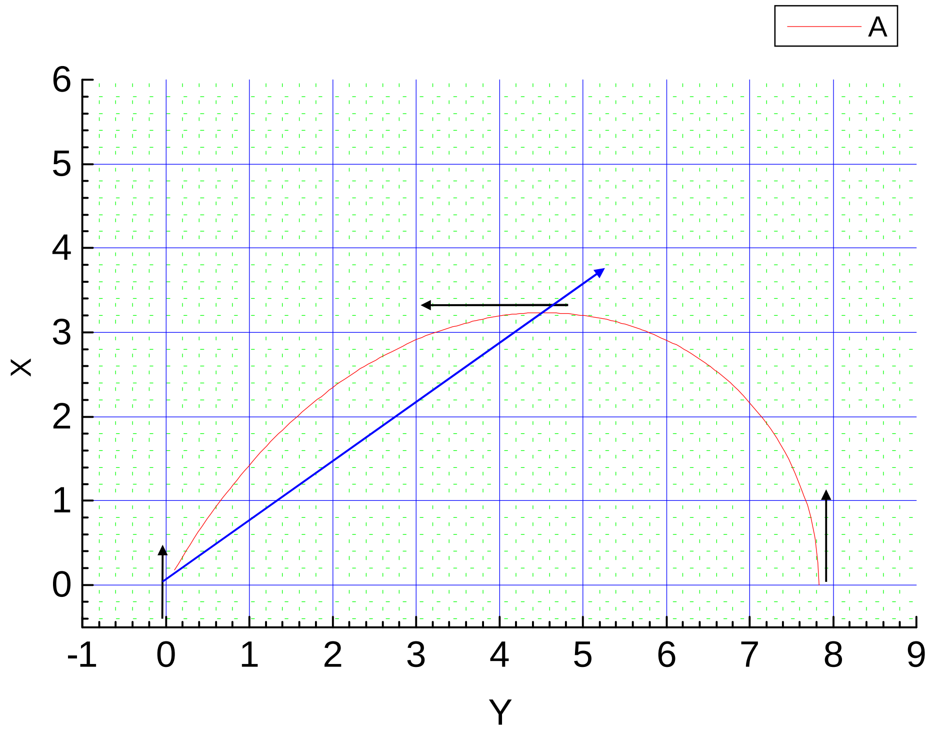

Рис. 4

Слева на графике показан вектор диполя $\vec{p}$, сверху и справа показано направление вектора $\vec{E}$ электрического поля диполя, касательного к непрерывной силовой линии. Вектор под углом – начальный полярный угол силовой линии, равный 55^0 относительно оси X, при котором проекция вектора $\vec{E}$ в этой точке силовой линии на ось X равна нулю.

Теперь выведем функциональные зависимости проекций вектора электрического поля диполя $\vec{E}$ на полярный вектор $\vec{e}_r$ и нормаль к нему $\vec{e}_\alpha$. Согласно рис.1 вектор электрического поля диполя составляет угол φ по отношению к полярному вектору

$$\varphi=\alpha+\theta=\pi-\mathrm{arcctg}2\mathrm{ctg}(\alpha) \tag{32}$$

и угол ψ по отношению вектора нормали $\vec{e}_\alpha$

$$\psi = \varphi - \pi/2 = \pi/2 - \operatorname{arcctg} 2 \operatorname{ctg}(\alpha) \qquad (33)$$

По аналогии с (18) запишем проекции вектора электрического поля на полярную систему координат $\vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_r$:

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \left|\vec{E}\right| Cos(\psi) = \left|\vec{E}\right| Sin(arcctg2ctg(\alpha)) = \frac{p}{\varepsilon}\frac{Sin(\alpha)}{R^3}, \\ E_r &= \left|\vec{E}\right| Sin(\varphi) = \left|\vec{E}\right| Cos(arcctg2ctg(\alpha)) = \frac{2p}{\varepsilon}\frac{Cos(\alpha)}{R^3}. \end{aligned} \qquad (34)$$

Формулы (34) совпадают с формулами [1].

График функции лепестка нормальной составляющей E_α при постоянном R_0 вектора электрического поля диполя в полярной системе координат показан на рис.5.

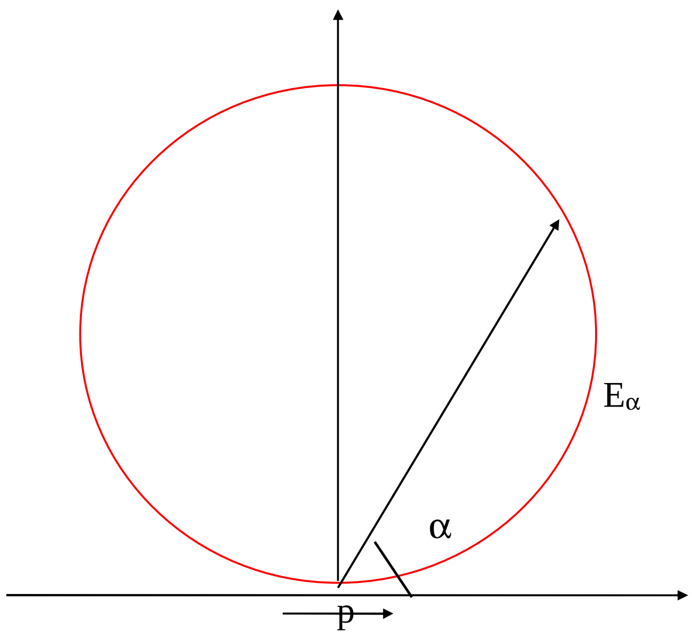

Рис.5

Форма лепестка поперечного излучения диполя при малых частотах представляет собой круг.

Литература

1. Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, Справочник по физике ,143–147, (1968).
2. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев, Справочник по математике, 186–187, (1962).

3. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев, Справочник по математике, 189, (1962).