Косинский Ю.И.

Поле линейного электрического диполя, расположенного в вакууме

Если нейтральную молекулу или атом поместить в электрическое поле, то орбиты электронов смещаются и возникает дополнительное микрораспределение зарядов ρ и токов $\vec{j}$ внутри атома, которое является источником электромагнитного поля. Электромагнитное поле, излучаемое атомом, должно удовлетворять уравнениям Максвелла. В основе микроструктурной модели взаимодействия электромагнитного поля с веществом лежит простейшее предположение, заключающееся в рассмотрении вещества как совокупности молекул или атомов, расположенных в вакууме. В вакууме электрическая и магнитная индукции равны соответствующим полям $\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$, поэтому уравнения можно записать в виде [1]:

$$rot\,\vec{H} - \frac{1}{c}\dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1}$$

$$rot\,\vec{E} + \frac{1}{c}\dot{\vec{B}} = 0 \tag{2}$$

$$div\,\vec{E} = 4\pi\,\rho \tag{3}$$

$$div\,\vec{H} = 0 \tag{4}$$

Функциональную зависимость для поля диполя будем искать напрямую, без привлечения электродинамических векторных и скалярных потенциалов $\vec{A}$ и φ и соответствующих им условий нормировки. В этом и состоит различие с [1] в выводе функции поля диполя.

Воспользовавшись операциями $\partial / \partial\, t$ и подстановкой одного уравнения (2), (1) в другое (1), (2), а также тождеством $rot\,rot \equiv grad\,div - \nabla^2$ и уравнениями (3), (4), преобразуем уравнения (1), (2) в неоднородные волновые уравнения, в которые каждый из векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ входит отдельно.

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c^2}\dot{\vec{j}} + 4\pi\,grad\,\rho \tag{5}$$

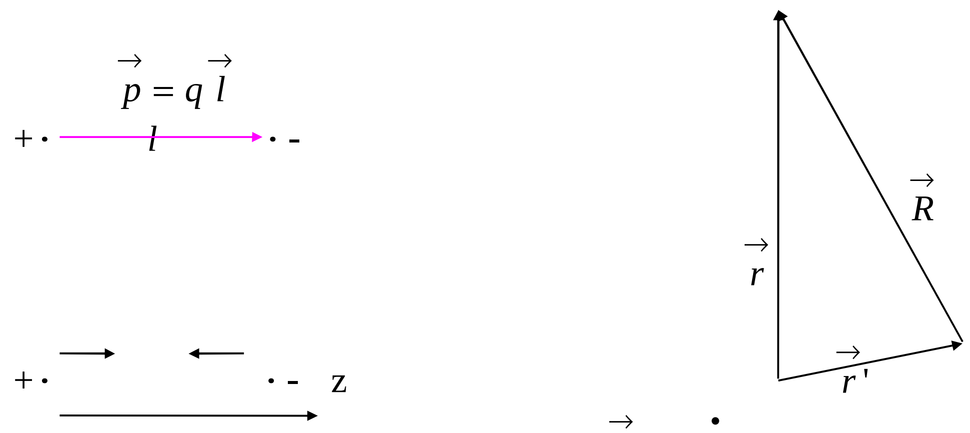
$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{H}} = -\frac{4\pi}{c}\, rot\, \vec{j} \tag{6}$$

Прямые частные решения неоднородных уравнений (5), (6) можно выразить через запаздывающие потенциалы [2] в виде

$$\vec{E}\left(\vec{R},t\right) = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[\ddot{\vec{p}}\right]dV' - \int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[grad'\rho\right]dV', \tag{7}$$

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right) = -\frac{1}{c}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[rot'\,\dot{\vec{p}}\right]dV'. \tag{8}$$

Здесь была учтена замена [3] $\vec{j} = -\dot{\vec{p}}$ согласно рис. 1.



$$\vec{j} = q\frac{dz}{dt} = -q\frac{d\vec{l}}{dt} = -\dot{\vec{p}}$$

Рис. 1.

Согласно правой части рис. 1 можно записать

$$R = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|$$
$$grad' = -grad, \tag{9}$$
$$rot' = -rot$$

При этом действие операторов распространяется на функцию R.

Соотношения (7), (8) запишем с учетом (9)

$$\vec{E}\left(\vec{R},t\right) = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[\ddot{\vec{p}}\right]dV + \int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[grad\,\rho\right]dV \tag{10}$$

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right)=\frac{1}{c}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[rot\,\dot{\vec{p}}\right]dV \qquad (11)$$

Суть решения интегральных уравнений (10), (11) следующая. Необходимо преобразовать подинтегральные выражения так, чтобы операторы дифференцирования действовали только на функцию $\frac{1}{R}$, а затем с помощью дельта функций, накладываемые на $\vec{p}$ и ρ, можно выйти из под знака интеграла

Распишем подробно действие знака запаздывающего потенциала.

$$\left[grad\,\rho\right]=\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)grad\,\rho$$

$$\left[rot\,\dot{\vec{p}}\right]=\frac{d}{d\,t}\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)rot\,\vec{p} \qquad (12)$$

$$\left[\ddot{\vec{p}}\right]=\frac{d^{2}}{d\,t^{2}}\left(\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)\vec{p}\right)$$

Из соотношений (12) следуют очевидные функциональные зависимости.

$$grad\left(\rho\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)\right)=\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)grad\,\rho-\frac{i\omega}{c}\frac{\vec{R}}{R}\rho\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right),$$

$$grad\left[\rho\right]=\left[grad\,\rho\right]-\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\left[\dot{\rho}\right]. \qquad (13)$$

$$rot\left(\vec{p}\frac{d}{d\,t}\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)\right)=\frac{d}{d\,t}\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)rot\,\vec{p}-\frac{i\omega}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{p}\frac{d}{d\,t}\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right),$$

$$rot\left[\dot{\vec{p}}\right]=\left[rot\,\dot{\vec{p}}\right]-\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\left[\ddot{\vec{p}}\right]. \qquad (14)$$

Интегральные соотношения (10), (14), учитывая функциональные зависимости (13), (14) запишутся так

$$\vec{E}\left(\vec{R},t\right)=\frac{1}{c^{2}}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[\ddot{\vec{p}}\right]dV+\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\left[\dot{\rho}\right]+grad\left[\rho\right]\right)dV\,, \qquad (15)$$

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right) = \frac{1}{c}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\left[\ddot{\vec{p}}\right] + rot\left[\dot{\vec{p}}\right]\right)dV. \tag{16}$$

Правые слагаемые соотношения (15), (16) можно преобразовать следующим образом

$$\int_{\sigma} grad\left(\frac{1}{R}[\rho]\right)dV = \int_{S} d\vec{S}\left(\frac{1}{R}[\rho]\right) = 0 = \int_{\sigma}\left(\frac{1}{R}grad[\rho] + [\rho]grad\frac{1}{R}\right)dV, \tag{17}$$

$$\int_{\sigma} rot\left(\frac{1}{R}\left[\dot{\vec{p}}\right]\right)dV = \int_{S} d\vec{S}\times\frac{1}{R}\left[\dot{\vec{p}}\right] = 0 = \int_{\sigma}\left(\frac{1}{R}rot\left[\dot{\vec{p}}\right] - \left[\dot{\vec{p}}\right]\times grad\frac{1}{R}\right)dV. \tag{18}$$

Результат интегрирования по поверхности дает ноль, так как зарядов на поверхности интегрируемого объема нет.

С учетом преобразований и дифференцирования интегральные соотношения (15), (16) запишутся в таком виде

$$\vec{E}\left(\vec{R},t\right) = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma}\frac{1}{R}\left[\ddot{\vec{p}}\right]dV + \int_{\sigma}\left(\frac{\vec{R}}{cR^2}[\dot{\rho}] + \frac{\vec{R}}{R^3}[\rho]\right)dV, \tag{19}$$

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right) = \frac{1}{c}\int_{\sigma}\left(\frac{1}{cR^2}\vec{R}\times\left[\ddot{\vec{p}}\right] + \frac{1}{R^3}\vec{R}\times\left[\dot{\vec{p}}\right]\right)dV. \tag{20}$$

В интегральные соотношения остается только подставить дельта-функции нахождения диполя и зарядов и задача с интегрированием будет решена.

$$\vec{p} = \vec{n}\,p\delta\left(\vec{R} - \vec{R}_+\right), \quad \rho_+ = e_+\delta\left(\vec{R} - \vec{R}_+\right), \quad \rho_- = e_-\delta\left(\vec{R} - \vec{R}_-\right). \tag{21}$$

Плотность заряда имеет два заряда: положительный и отрицательный, расположенные друг от друга на расстоянии $\vec{r}_-$, т.е.

$$\vec{R}_- = \vec{R}_+ - \vec{r}_-. \tag{22}$$

Интегрирование крайне правого слагаемого соотношения (19) удобно записать в таком виде

$$\int_{\sigma} F\left(\vec{R}\right)\rho dV = e_+\left(F\left(\vec{R}_+\right) - F\left(\vec{R}_+ - \vec{r}_-\right)\right), \tag{23}$$

где введено обозначение

$$F\left(\vec{R}\right)=\left(\frac{i\omega\vec{R}}{cR^2}+\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right). \tag{24}$$

Для упрощения записи опустим знак плюс в соотношении (23) и запишем

$$\int_{\sigma}F\left(\vec{R}\right)\rho dV=e_+\vec{r}_-\lim_{r_-\to 0}\frac{F\left(\vec{R}\right)-F\left(\vec{R}-\vec{r}_-\right)}{\vec{r}_-}=e_+\left(\vec{r}_-\nabla\right)F\left(\vec{R}\right)=\left(\vec{p}\nabla\right)F\left(\vec{R}\right). \tag{25}$$

Распишем подробно действие оператора

$$\left(\vec{p}\nabla\right)F\left(\vec{R}\right)=\left(\frac{p_x\,\partial}{\partial x}+\frac{p_y\,\partial}{\partial y}+\frac{p_z\,\partial}{\partial z}\right)F\left(\vec{R}\right)=\left[\left(\frac{i\omega\vec{R}}{cR^2}+\frac{\vec{R}}{R^3}\right)\left(-\frac{i\omega}{c}\right)\frac{p_x x+p_y y+p_z z}{R}\right]*$$

$$*\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)+$$

$$+\left[\left(\frac{i\omega}{cR^2}+\frac{1}{R^3}\right)\vec{p}-\frac{i\omega}{c}\vec{R}\frac{2\vec{p}\vec{R}}{R^4}-\vec{R}\frac{3\vec{p}\vec{R}}{R^5}\right]\exp\left(i\omega\left(t-R/c\right)\right)=\left\{\frac{|\dot{p}|}{cR^2}+\frac{[p]}{R^3}\right\}\vec{n}-$$

$$-\left\{\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}+\frac{3[\dot{p}]}{cR^4}+\frac{3[p]}{R^5}\right\}\left(\vec{n}\vec{R}\right)\vec{R}. \tag{26}$$

Окончательный результат решения интегрального соотношения (19), (20), учитывая (21), (26), запишется в таком виде

$$\vec{E}\left(\vec{R},t\right)=\frac{[\ddot{p}]\vec{n}}{c^2R}+\left\{\frac{[\dot{p}]}{cR^2}+\frac{[p]}{R^3}\right\}\vec{n}-\left\{\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^3}+\frac{3[\dot{p}]}{cR^4}+\frac{3[p]}{R^5}\right\}\left(\vec{n}\vec{R}\right)\vec{R}, \tag{27}$$

$$\vec{H}\left(\vec{R},t\right)=-\left\{\frac{[\dot{p}]}{cR^3}+\frac{[\ddot{p}]}{c^2R^2}\right\}\left(\vec{n}\times\vec{R}\right). \tag{28}$$

Найденное электрическое поле диполя (27) можно записать в более компактной форме с использованием электрического вектора Герца [4]

$$\vec{E}\left(\vec{R},t\right) = \frac{1}{c^2}\frac{[\ddot{p}]}{R}\vec{n} - grad\,div\left(\frac{[p]}{R}\vec{n}\right) = -rot\,rot\left(\frac{[p]}{R}\vec{n}\right). \tag{29}$$

Сравнение (29) с [4] показывает, что результаты вычисленного электрического поля диполя полностью совпадают за исключением знака. Это можно объяснить тем, что в данной работе вектор диполя обозначался стрелкой от плюса к минусу (см. рис.1), а в работе [3], [4] наоборот.

Литература

1. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, 98, (1970).
2. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, 100, 106, (1970).
3. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, 102, (1970).
4. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, 108, (1970).