Косинский Юрий Иванович

Энергия и этапы перехода с одной круговой орбиты на другую

Согласно статьи “Энергетические и скоростные свойства эллиптических орбит” параметры круговой орбиты имеют следующие функциональные зависимости.

$$\upsilon_0 = \sqrt{g_0 R_0}, \quad g_0 = \frac{a}{mR_0^2}, \quad \upsilon_0 = \sqrt{\frac{a}{mR_0}}, \quad m\upsilon_0^2 = \frac{a}{R_0}. \tag{1}$$

Где υ_0 - скорость тела на круговой орбите,

R_0 - радиус орбиты,

g_0 - ускорение центральной силы притяжения на орбите,

$a = \gamma m M$,

γ - постоянная тяготения,

m - масса тела на орбите,

M - масса центральных сил.

Проведем исследования при переходе тела с круговой орбиты радиуса R_0 на круговую орбиту с радиусом R_1, при этом $R_1 > R_0$. Для круговой орбиты с R_1 следует

$$m\upsilon_1^2 = \frac{a}{R_1} \tag{2}$$

Из формул (1), (2) следует , что $\upsilon_1 < \upsilon_0$, так как

$$\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_0}}. \tag{3}$$

Чтобы перевести тело в поле потенциальных сил с радиуса R_0 на радиус R_1 , необходимо затратить потенциальню энергию W_p

$$W_p = a\int_{R_0}^{R_1} \frac{dR}{R^2} = -\frac{a}{R}\bigg|_{R_0}^{R_1} = a\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{4}$$

Так как кинетическая энергия тела на более высокой орбите меньше, чем на начальной орбите, то для перевода тела с одной круговой орбиты на другую в целом необходиммо затратить энергию

$$W_{R_0 \to R_1} = W_p - \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{m\upsilon_1^2}{2} = a\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R_1}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (5)$$

В соотношении (5) мы получили, сколько энергии необходимо затратить для перевода тела с одной круговой орбиты на другую. Теперь стоит вопрос, как необходимо тратить эту энергию, и в какой последовательности. А затрачивать ее необходимо в два этапа. Первым этапом является перевод тела с круговой орбиты радиуса R_0 на эллиптическую орбиту с минимальным радиусом R_0 и максимальным радиусом R_1 в экстремальных точках. Эксцентриситет при этом для эллиптической орбиты будет равен

$$e = \frac{R_1 - R_0}{R_0 - R_1}\,. \qquad (6)$$

Отношение скоростей в экстремальных точках равно

$$\frac{\upsilon_{\max}}{\upsilon_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} = \frac{1 + \frac{R_1 - R_0}{R_0 + R_1}}{1 - \frac{R_1 - R_0}{R_0 + R_1}} = \frac{R_1}{R_0}\,. \qquad (7)$$

При этом $\upsilon_{\max}$ можно найти из соотношения

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{(1+e)g_0 R_0} = \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_0} \cdot \frac{a}{mR_0}}\,, \qquad (8)$$

а минимальное значение скорости из соотношения (7), используя (8)

$$\upsilon_{\min} = \upsilon_{\max}\frac{R_0}{R_1} = \frac{R_0}{R_1}\sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_0} \cdot \frac{a}{mR_0}} = \sqrt{\frac{2R_0}{R_0 + R_1} \cdot \frac{a}{mR_1}}\,. \qquad (9)$$

Таким образом первым этапом будет переход с круговой орбиты на эллиптическую с затратой энргии на увеличение скорости $\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} = W_1$

$$W_1 = \frac{R_1}{R_0 + R_1} \cdot \frac{a}{R_0} - \frac{a}{2R_0} = e\frac{m\upsilon_0^2}{2} \qquad . \qquad (10)$$

Затем, на эллиптической орбите в экстремальной точке R_1, необходимо перейти на круговую орбиту с радиусом R_1. Для этого необходимо затратить энергию на увеличение скорости $\frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} = W_2$, чтобы тело сошло с эллиптической орбиты на круговую и осталось на ней

$$W_2 = \frac{a}{2R_1} - \frac{R_0}{R_0 + R_1} \cdot \frac{a}{R_1} = e\frac{m\upsilon_1^2}{2} = e\frac{m\upsilon_0^2}{2} \cdot \frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_0^2} = e\frac{m\upsilon_0^2}{2} \cdot \frac{R_0}{R_1}. \qquad (11)$$

Можно убедиться, используя первые соотношения в (10), (11), что

$$W_1 + W_2 = W_{R_0 \to R_1} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) = e\frac{m\upsilon_0^2}{2}\left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right). \qquad (12)$$

Из соотношений (8), (9) можно получить также такую зависимость

$$\frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} - \frac{m\upsilon_{\min}^2}{2} = \frac{a}{R_0 + R_1}\left(\frac{R_1}{R_0} - \frac{R_0}{R_1}\right) = a\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (13)$$

Для перехода с высокой круговой орбиты на более низкую, когда $R_0 > R_1$, следует учесть, что эксцентриситет будет отрицательной величиной и соответственно затраченная энергия в формулах (10), (11), (12). Т.е. в двух этапах энергия будет тратиться на торможение (уменьшение скорости тела на орбитах).

$\frac{1+e}{1-e}=2 \quad 1+e=2-2e \quad e=\frac{1}{3} \quad \frac{R_M}{R_0}=2$

$R(\varphi)\,v_\varphi(\varphi)=R_0 v_0$

$e=0.2 \quad \frac{R_M}{R_0}=1,5$

$v(\varphi)=(v_\varphi^2+v_R^2)^{1/2}=\frac{v_0}{1+e}(1+2e\cos\varphi+e^2)^{1/2}$

$v_\varphi=\frac{v_0}{1+e}(1+e\cos\varphi)$

$v_R=\frac{v_0}{1+e}e\sin\varphi$

$W=-\frac{m v_0^2}{2}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)=-\frac{m v_0 v_{min}}{2}$

$R(\varphi)=R_0\frac{1+e}{1+e\cos\varphi}$

$v_{max}=v_0$

$e=\frac{v_0-v_{min}}{v_0+v_{min}}$

$e=\frac{R_{max}-R_0}{R_{max}+R_0}$

$R_{min}=R_0$

$B=\frac{v_0+v_{min}}{2}$

$B=\frac{v_0}{1+e}$

$v_{косм}=\sqrt{(1+e)g_0R_0}$

$F=-\frac{a}{R^2}=-mg$

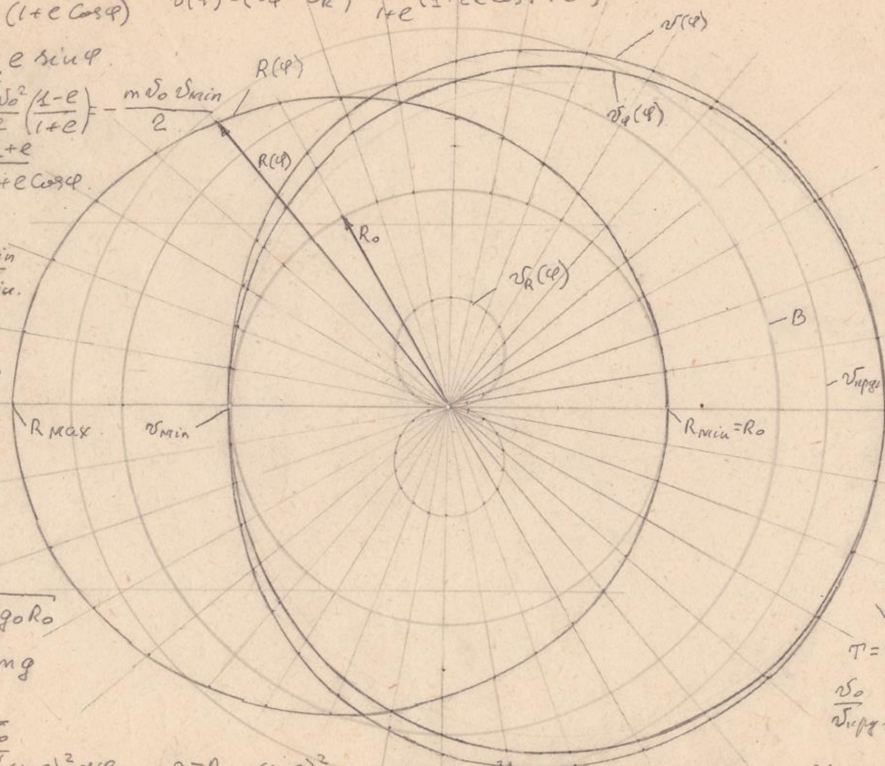
$B=\frac{a}{mR_0v_0}$

$2a=R_0\left(1+\frac{1+e}{1-e}\right)=\frac{2R_0}{1-e}$

$a=R_0\frac{1}{1-e}=R_0\frac{1+e}{1-e^2}=\frac{p}{1-e^2}$

$1+e=\frac{v_0}{B} \quad R_0\frac{v_0}{B}=p$

$\frac{v_0}{B}=\frac{4}{3} \quad e=\frac{1}{3}$



$v_\varphi=\frac{v_{\text{кругл}}}{(1+e)^{1/2}}(1+e\cos\varphi)$

$v_R=\frac{v_{\text{кругл}}}{(1+e)^{1/2}}e\sin\varphi$

$v=\frac{v_{\text{кругл}}}{(1+e)^{1/2}}(1+2e\cos\varphi+e^2)$

$v_{max}=v_0$

$\frac{v_0}{v_{min}}=\frac{(1+e)}{(1-e)}=\frac{v_{max}}{v_{min}}$

$v_{\text{кругл}}=\sqrt{g_0R_0}$

$W=-\frac{m v_{\text{кругл}}^2}{2}(1-e)$

$T=2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_{max}}{R_0}\right)\right)^{3/2}$ 1,49

$\frac{v_0}{v_{\text{кругл}}}=(1+e)^{1/2}$

$v_{\text{кругл}}$ – скорость круговой орбиты с R_0

$$T=\frac{R_0}{v_0}\int_0^{2\pi}\frac{(1+e)^2\,d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}=\frac{2\pi R_0}{v_0}\cdot\frac{(1+e)^2}{(1-e^2)^{3/2}}=\frac{2\pi R_0}{v_0}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{3/2}\frac{1}{(1+e)}=\frac{2\pi R_0}{v_{\text{кругл}}}\left(\frac{1}{1-e}\right)^{3/2}=\frac{2\pi R_0}{v_{\text{кругл}}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{R_{max}}{R_0}+1\right)\right)^{3/2}$$