Косинский Юрий Иванович

Энергетические и скоростные свойства эллиптических орбит

Материальная точка массой m движется в круговой системе координат, имеет координату R_0 и вектор скорости υ_0. За время t точка пройдет путь $\upsilon_0 \cdot t$ и координата радиус-вектора повернется на угол φ, который связан таким соотношением:

$$tg(\varphi) = \frac{\upsilon_0 \cdot t}{R_0} \tag{1}$$

Согласно рис.1, по прошествии времени t, точка в круговом базисе будет иметь координату R, компоненты вектора-скорости υ_φ и υ_R, которые связаны через угол φ такими зависимостями:

$$\upsilon_\varphi = \upsilon_0 \cdot Cos(\varphi) \tag{2}$$

$$\upsilon_R = \upsilon_0 \cdot Sin(\varphi) \tag{3}$$

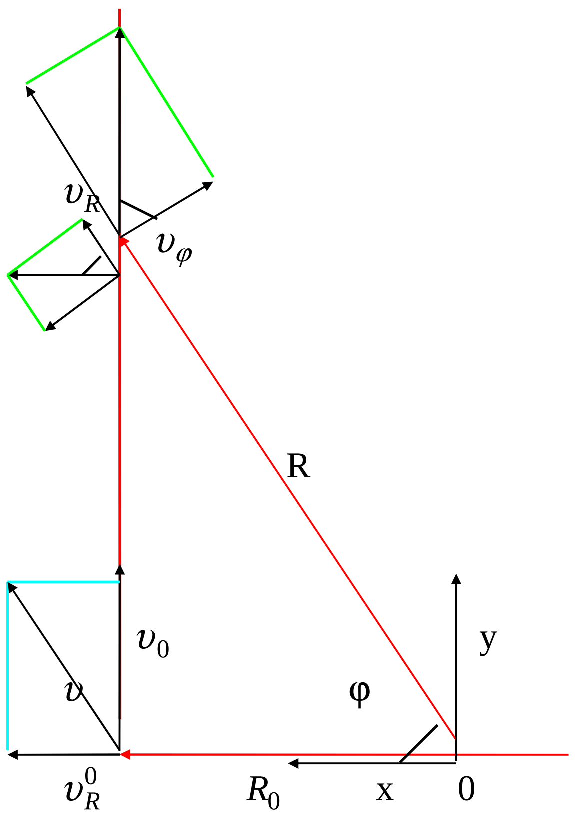

Рис.1

$$R = \frac{R_0}{Cos(\varphi)} \qquad (4)$$

Исключив из соотношений (2),(4) Cos(φ), получим очень важную зависимость, которая будет применена в дальнейшем:

$$R \cdot \upsilon_\varphi = R_0 \cdot \upsilon_0 , \qquad (5)$$

где слева равенства стоит произведение переменных величин, а справа находится произведение констант-начальных условий.

В общем случае, когда начальный вектор имеет две составляющие υ_0 и υ_R^0 (см, рис.1), соотношения (2)-(3) запишутся в таком виде:

$$\upsilon_\varphi = \upsilon_0 \cdot Cos(\varphi) - \upsilon_R^0 \cdot Sin(\varphi); \qquad \upsilon_\varphi = \upsilon_y \cdot Cos(\varphi) - \upsilon_x \cdot Sin(\varphi), \qquad (6)$$

$$\upsilon_R = \upsilon_0 \cdot Sin(\varphi) + \upsilon_R^0 \cdot Cos(\varphi); \qquad \upsilon_R = \upsilon_y \cdot Sin(\varphi) + \upsilon_x \cdot Cos(\varphi). \qquad (7)$$

Возьмем дифференциал от левой и правой части соотношения (1):

$$\frac{1}{Cos^2(\varphi)} \cdot d\varphi = \frac{\upsilon_0}{R_0} \cdot dt . \qquad (8)$$

Исключим функцию $Cos^2(\varphi)$ с помощью соотношений (2), (4). В результате получим:

$$d\varphi \cdot \frac{R}{\upsilon_\varphi} = dt . \qquad (9)$$

В дальнейшем это соотношение будет использовано при замене переменных и вычислении периода обращения тела на орбите..

Путем дифференцирования соотношений (2), (3) можно получить также следующие зависимости:

$$\frac{d\upsilon_\varphi}{d\varphi} = -\upsilon_R$$

$$\frac{d\upsilon_R}{d\varphi} = \upsilon_\varphi \qquad (10)$$

$$\frac{d^2\upsilon_\varphi}{(d\varphi)^2} + \upsilon_\varphi = 0$$

Постановка задачи следующая: на тело (точку) массой m, имеющее скорость υ_0 (максимальную), действует центральная гравитационная сила

$$F = -\frac{a}{R^2} , \qquad (11)$$

где $a = \gamma \cdot m \cdot M$, $\qquad (11^A)$

γ - гравитационная постоянная,

m - масса тела,

M - центральная масса,

R - радиус-вектор расстояния между массами.

В декартовых координатах по осям x и y действуют соответствующие силы:

$$F_x = -\frac{a}{R^2} \cdot Cos(\varphi)$$
$$F_y = -\frac{a}{R^2} \cdot Sin(\varphi) \qquad (12)$$

Соответствующие импульсы [1] силы обозначим так:

$$I_x(t) = \int_0^t F_x(t') \cdot dt'$$
$$I_y(t) = \int_0^t F_y(t') \cdot dt' \qquad (13)$$

Подставив значения (9), (12) в соотношения (13) и учитывая равенство (5), получим функциональные зависимости для импульсов:

$$I_x(\varphi) = -\int_0^\varphi \frac{a}{R \cdot \upsilon_\varphi} \cdot Cos(\varphi') \cdot d\varphi' = -\int_0^\varphi \frac{a}{R_0 \cdot \upsilon_0} \cdot Cos(\varphi') \cdot d\varphi'$$
$$I_y(\varphi) = -\int_0^\varphi \frac{a}{R \cdot \upsilon_\varphi} \cdot Sin(\varphi') \cdot d\varphi' = -\int_0^\varphi \frac{a}{R_0 \cdot \upsilon_0} \cdot Sin(\varphi') \cdot d\varphi' \qquad (14)$$

Соответствующие им компоненты скоростей [1] имеют такую зависимость:

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_x^0 + \frac{1}{m} \cdot I_x(t)$$
$$\upsilon_y(t) = \upsilon_y^0 + \frac{1}{m} \cdot I_y(t) \qquad (15)$$

Начальные условия следующие:

$$\upsilon_x^0 = 0$$
$$\upsilon_y^0 = \upsilon_0 \qquad (16)$$

С учетом начальных условий и соотношений (14) компоненты скоростей примут такой вид:

$$\upsilon_x = -\int_0^{\varphi} B\cdot Cos(\varphi')\cdot d\varphi' = -B\cdot Sin(\varphi),$$
$$\upsilon_y = \upsilon_0 - \int_0^{\varphi} B\cdot Sin(\varphi')\cdot d\varphi' = \upsilon_0 - B + B\cdot Cos(\varphi). \quad (17)$$

где введено обозначение : В - скоростной параметр орбиты.

$$B = \frac{1}{m}\cdot\frac{a}{R_0\cdot\upsilon_0} \quad (18)$$

Подставив функциональные зависимости (17) в соотношения (6). (7), найдем зависимости для компонент скорости в круговом базисе:

$$\upsilon_\varphi = (\upsilon_0 - B)\cdot Cos(\varphi) + B$$
$$\upsilon_R = (\upsilon_0 - B)\cdot Sin(\varphi) \quad (19)$$

Из функциональных зависимостей (19) следует, что при равенстве $\upsilon_0 = B$, радиальная составляющая скорости равна нулю, а угловая скорость имеет постоянную величину, т.е. точка вращается по круговой орбите, Этот же вывод следует из соотношений (17). При начальной скорости (угол φ=0) υ_0 больше или меньше скоростного параметра орбиты В орбита принимает форму эллипса. Из соотношения (17) для υ_y следует, что при υ_0>B

$$\upsilon_{\max} = \upsilon_0 \quad (\varphi = 0)$$
$$\upsilon_{\min} = 2B - \upsilon_0 \ (\varphi = \pi), \quad (20)$$

а при υ_0<B

$$\upsilon_{\min} = \upsilon_0 \quad (\varphi = 0)$$
$$\upsilon_{\max} = 2B - \upsilon_0 \ (\varphi = \pi). \quad (21)$$

где $\upsilon_{\max}$ - максимальное значение скорости , которое может принимать тело на орбите, $\upsilon_{\min}$ - минимальное значение скорости, которое может принимать тело на орбите.

Область возможных значений начальной скорости υ_0 (при сохранении тела на замкнутой орбите) находится в пределах: $0 < \upsilon_0 < 2B$. (22)

Из соотношения (5) найдем функциональную зависимость от угла φ для радиуса орбиты.

$$R = \frac{R_0 \cdot \upsilon_0}{\upsilon_\varphi} = R_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{B - (\upsilon_0 - B)\cdot Cos(\varphi)} = R_0 \cdot \frac{1 + \frac{\upsilon_0 - B}{B}}{1 + \frac{\upsilon_0 - B}{B} Cos(\varphi)} = R_0 \cdot \frac{1+e}{1 + e \cdot Cos(\varphi)}, \quad (23)$$

где $e = \frac{\upsilon_0 - B}{B}$ - эксцентриситет орбиты. (24)

Как видно из формул (23), (24) , эксцентриситет орбиты e,как параметр, функционально заменяет скоростной параметр орбиты В

Согласно (22) эксцентриситет орбиты может находиться в пределах $-1 < e < 1$ и быть как положительным так и отрицательным числом . (25)

При этом, если $e > 0$, $R(\varphi = \pi) = R_{\max} > R_0$, а если $e < 0$, $R(\varphi = \pi) = R_{\min} < R_0$.

Эксцентриситет орбиты также можно выразить через (из (23)) экстремальные значения радиуса орбиты:

$$e = \frac{R_{\max} - R_0}{R_{\max} + R_0} > 0,$$
$$e = \frac{R_{\min} - R_0}{R_{\min} + R_0} < 0. \quad (26)$$

А также

$$\frac{R_{\max}}{R_0} = \frac{1+e}{1-e}, \quad e>0. \quad (26^{A})$$

Из формул (24), (20), (21) выразим эксцентриситет орбиты через экстремальные значения скорости тела на орбите:

$$e = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_{\min}}{\upsilon_0 + \upsilon_{\min}} > 0,$$
$$e = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_{\max}}{\upsilon_0 + \upsilon_{\max}} < 0. \quad (27)$$

А также

$$\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{\min}} = \frac{1+e}{1-e}, \quad e>0. \quad (27^{A})$$

На круговой орбите, когда начальная скорость равна скоростному параметру орбиты : $\upsilon_0 = B$, из соотношения (18) следует

$$m \cdot \upsilon_0^2 = \frac{a}{R_0}, \quad (28)$$

что удвоенная кинетическая энергия равна потенциальной энергии. Это и есть физическое условие движения тела по круговой орбите. Равенство (28) можно представить еще в таком виде:

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{R_0} = F(R_0)\,. \qquad (29)$$

В формуле (29) представлено соотношение между силой, которая притягивает к центру орбиты, радиусом кривизны орбиты , кинетической энергией вращающегося тела, которое необходимо выполнять, чтобы тело двигалось по круговой орбите.

Из соотношений (17) найдем абсолютную скорость вращающегося тела в общем случае на эллиптической орбите.

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = B^2 + 2\cdot B\cdot(\upsilon_0 - B)\cdot Cos(\varphi) + (\upsilon_0 - B)^2 \qquad (30)$$

На эллиптической орбите соотношение между начальной скоростью υ_0 и скоростным параметром B согласно (24) можно представить в таком виде:

$$\upsilon_0 = B\cdot(1+e) \qquad (31)$$

В случае эллиптической орбиты равенство: $\upsilon_0 = B$ и условие (равенство) (28), (29) нарушается.

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{R_0} = F(R_0)\cdot(1+e) \qquad (29^A)$$

Удвоенная кинетическая энергия может быть уже больше или меньше потенциальной энергии. В связи с этим, в процессе движения тела на орбите, происходит перекачка определенной части энергии из кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Покажем это на примере. Пусть $\upsilon_0 > B$, в начальном состоянии $(\varphi = 0)$ удвоенная кинетическая энергия согласно (30) равна

$$m\cdot \upsilon^2(\varphi = 0) = m\cdot \upsilon_0^2\,. \qquad (32)$$

Потенциальная энергия согласно (18) равна

$$\frac{a}{R_0} = m\cdot B\cdot \upsilon_0 = \frac{m\cdot \upsilon_0^2}{1+e} < m\cdot \upsilon_0^2 \qquad (33)$$

и меньше удвоенной кинетической на величину:

$$m\cdot \upsilon_0^2 - m\cdot \upsilon_0\cdot B = m\cdot\frac{\upsilon_0 - B}{B}\cdot \upsilon_0\cdot B = e\cdot\frac{a}{R_0} \qquad (33^A)$$

Найдем различие кинетической энергии в двух экстремальных точках: (φ=0) и (φ=π) при этом будут использованы соотношения (18),(20),(24),(30),(31).

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2(\varphi=0)}{2}-\frac{m\cdot \upsilon_{\min}^2(\varphi=\pi)}{2}=\frac{m}{2}\cdot\left(\upsilon_0^2-\upsilon_0^2+4\cdot B\left(\upsilon_0-B\right)\right)=2\cdot m\cdot B\left(\upsilon_0-B\right)=$$
$$2\cdot m\cdot B^2\cdot\frac{\upsilon_0-B}{B}=2\cdot m\cdot B\cdot\upsilon_0\cdot\left(\frac{B}{\upsilon_0}\cdot\frac{\upsilon_0-B}{B}\right)=2\cdot m\cdot\frac{e}{1+e}\cdot B\cdot\upsilon_0=\frac{2\cdot e}{1+e}\cdot\frac{a}{R_0} \qquad (34)$$

Как видно из соотношения (34) после поворота на угол π кинетическая энергия тела уменьшилась на величину $\frac{2\cdot e}{1+e}\cdot\frac{a}{R_0}$. При этом потенциальная энергия увеличилась на эту же величину:

$$\int_{R_0(\varphi=0)}^{R_{\max}(\varphi=\pi)}\frac{a}{R^2}\cdot dR=-\frac{a}{R}\bigg|_{R_0}^{R_{\max}}=a\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_{\max}}\right)=\frac{a}{R_0}\cdot\frac{2\cdot e}{1+e}. \qquad (35)$$

Здесь были использованы соотношения (23),(26). На круговой орбите эксцентриситет орбиты e=0, начальное условие для скорости $\upsilon_0=B$ равно скоростному параметру орбиты. Круговая орбита - это условный ноль отсчета. На ней эксцентриситет орбиты равен нулю, начальные условия для скорости и радиуса орбиты остаются неизменными при вращении тела по орбите. При $\upsilon_0>B$ эксцентриситет орбиты становится $e>0$, при движении тела по орбите радиус и скорость изменяются, достигая при φ=π своего $R_{\max}$, $\upsilon_{\min}$. значения которых выражаются соответствующими формулами. При $\upsilon_0<B$ можно использовать те же формулы, заменив в них $e\to(-e), R_{\max}\to R_{\min}, \upsilon_{\min}\to\upsilon_{\max}$. Например, формулы (34), (35) примут такой вид:

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{2}-\frac{m\cdot \upsilon_{\max}^2(\varphi=\pi)}{2}=-\frac{2\cdot e}{1-e}\cdot\frac{a}{R_0}, \qquad (36)$$

$$\int_{R_0(\varphi=0)}^{R_{\min}(\varphi=\pi)}\frac{a}{R_0^2}\cdot dR=-\frac{2\cdot e}{1-e}\cdot\frac{a}{R_0}, \qquad (37)$$

где тело на орбите в экстремальной точке (φ=π) имеет максимальную скорость и минимальный радиус.

Из соотношений (34), (35) можно получить равенство :

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{2}-\frac{m\cdot \upsilon_{\min}^2}{2}=\frac{a}{R_0}-\frac{a}{R_{\max}}=\frac{2\cdot e}{1+e}\cdot\frac{a}{R_0} \qquad (38)$$

откуда следует

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{2}+\frac{a}{R_{\max}}=\frac{m\cdot \upsilon_{\min}^2}{2}+\frac{a}{R_0}, \qquad (39)$$

что сумма кинетической и потенциальной (в экстремально противоположных точках орбиты) энергий сохраняется (Рис. 2). Из (38) также следует, что разница между кинетической и потенциальной энергией тела в экстремальных точках сохраняется:

$$\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{2}-\frac{a}{R_0}=\frac{m\cdot \upsilon_{\min}^2}{2}-\frac{a}{R_{\max}} \qquad (40)$$

Такие зависимости вероятно связаны с тем, что вектор скорости кинетической энергии и сила потенциальной энергии в экстремальных точках перпендикулярны друг к другу. Результат (38), (39) можно обобщить на произвольное состояние тела на орбите:

$$\frac{m\cdot \upsilon^2(\varphi)}{2}+\frac{a}{R(\varphi+\pi)}=\frac{m\cdot \upsilon^2(\varphi+\pi)}{2}+\frac{a}{R(\varphi)} \qquad (41)$$

$$\frac{m\cdot \upsilon^2(\varphi)}{2}-\frac{a}{R(\varphi)}=\frac{m\cdot \upsilon^2(\varphi+\pi)}{2}-\frac{a}{R(\varphi+\pi)}=\frac{m\cdot \upsilon_0^2}{2}-\frac{a}{R_0} \qquad (42)$$

Найдем размеры полуосей орбиты a_0 и b_0 , выраженные через начальные условия υ_0 , R_0 и эксцентриситет орбиты e. Большая полуось a_0 равна полусумме максимальному и минимальному радиусу R в экстремальных точках, т.е. согласно (23) получим:

$$a_0=\frac{1}{2}\left(R_0+R_0\cdot\frac{1+e}{1-e}\right)=R_0\cdot\frac{1}{1-e} \qquad (43)$$

Малая полуось b_0 пересекает орбиту в точке, где скорость орбиты $\upsilon_y=0$

$$\upsilon_y=0=\upsilon_0-B+B\cdot Cos(\varphi), \qquad (44)$$

откуда следует угол этой точки φ_b :

$$\varphi_b=\arccos\left(\frac{B-\upsilon_0}{B}\right)=\arccos(-e) \qquad (45)$$

Подставив (45) в (23), найдем длину радиуса этой точки:

$$R_b=R_0\cdot\frac{1+e}{1-e^2}=R_0\cdot\frac{1}{1-e}, \qquad (46)$$

Зная соотношение для радиуса (46), найдем величину малой полуоси из формулы:

$$b_0=R_b\cdot Sin(\varphi_b)=R_0\cdot\left(\frac{1}{1-e}\cdot\sqrt{1-e^2}\right)=R_0\cdot\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad (47)$$

По математическому определению [1] эксцентриситет есть величина равная:

$$e_m = \frac{c_0}{a_0}, \tag{48}$$

где величина c_0 равна:

$$c_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2} \tag{49}$$

Подставив соотношения (43), (47) в (49), найдем параметр c_0

$$c_0 = R_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{(1-e)^2} - \frac{1+e}{1-e}} = R_0 \cdot \frac{|e|}{1-e}. \tag{50}$$

Выразим эксцентриситет из математического определения (48) через эксцентриситет из физического определения (24), (26), (27). Для этого подставим соотношения (43), (50) в (48) и получим:

$$e_m = |e| \tag{51}$$

Если учесть, что физический эксцентриситет может быть как положительным, так и отрицательным числом, эксцентриситеты совпадают.

Период времени обращения тела на орбите вычислим по формуле (9):

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi)\cdot d\varphi}{\upsilon_\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{R_0 \cdot \upsilon_0}{\upsilon_\varphi^2} \cdot d\varphi = \frac{R_0 \cdot \upsilon_0}{B^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{\upsilon_0 - B}{B} \cdot Cos(\varphi)\right)^2} =$$
$$= \frac{R_0}{\upsilon_0} \cdot (1+e)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + e\cdot Cos(\varphi))^2} \tag{52}$$

Здесь в преобразованиях были использованы соотношения (5), (19), (24), (31).

Согласно [2] интеграл в соотношении (52) решается следующим образом.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+e\cdot Cos(\varphi))^2} = \left.\frac{e\cdot Sin(\varphi)}{\left(e^2-1\right)\cdot(1+e\cdot Cos(\varphi))}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{e^2-1} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+Cos(\varphi)} =$$
$$= \frac{1}{1-e^2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1+Cos(\varphi)} = \frac{2}{1-e^2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1+Cos(\varphi)} =$$
$$= \frac{2}{1-e^2} \cdot \left(\left. \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \cdot arctg\left(\frac{(1-e)\cdot tg\left(\varphi/2\right)}{\sqrt{1-e^2}} \right) \right|_0^{\pi} \right) = \frac{2\cdot\pi}{\left(1-e^2\right)^{3/2}} \tag{53}$$

Подставив соотношение (53) в (52), найдем функциональную зависимость для периода времени обращения материальной точки на орбите от начальных условий и параметров орбиты.

$$T = 2\cdot\pi\cdot\frac{R_0}{\upsilon_0}\cdot\frac{(1+e)^2}{\left(1-e^2\right)^{3/2}} = 2\pi\frac{R_0}{\upsilon_0}\frac{\sqrt{1+e}}{\left(\sqrt{1-e}\right)^3} \tag{54}$$

Функционально период T можно выразить и через другие параметры.

$$a_0 = R_0\frac{1}{1-e} = R_0\frac{1+e}{1-e^2} = \left(\frac{R_0\upsilon_0}{B}\right)\frac{1}{1-e^2}. \tag{55}$$

В преобразованиях было использовано соотношение (24).

$$\begin{gathered} T = 2\pi\left(\frac{R_0\upsilon_0}{B}\right)\frac{1}{B}\frac{1}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{R_0\upsilon_0}{B}\right)^2\frac{1}{B^2}}{\left(1-e^2\right)^3}} = \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{R_0\upsilon_0}{B}\right)^3\frac{m}{mB\upsilon_0R_0}}{\left(1-e^2\right)^3}} = 2\pi\sqrt{a_0^3\frac{m}{a}} \end{gathered} \tag{56}$$

Здесь в преобразованиях были применены соотношения (55), (18). Использовав соотношение (11^A) , можно получить зависимость периода T от гравитационной постоянной и массы центральных сил.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{\gamma M}} \tag{57}$$

Если силу F в экстремальной точке R_0 обозначить как произведение массы на ускорение:

$$F = -\frac{a}{R_0^2} = -mg_0, \tag{58}$$

и применить это соотношение в функциональной зависимости (18):

$$B = \frac{a}{mR_0\upsilon_0} = \frac{g_0R_0}{\upsilon_0}, \tag{59}$$

мы получим известное соотношение для первой и второй космической скоромти в одной формуле.

$$\begin{gathered} B\upsilon_0 = g_0R_0; \quad \upsilon_0^2 = (1+e)g_0R_0 \\ \upsilon_0 = \sqrt{(1+e)g_0R_0} \end{gathered} \tag{60}$$

Подставим соотношение (60) в функциональную зависимость (54):

$$T = 2\pi \frac{R_0}{\upsilon_0} \frac{(1+e)^2}{\left(1-e^2\right)^{3/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_0}{g_0}} (1-e)^{-3/2} \qquad (61)$$

Здесь мы получили функциональную зависимость для периода эллиптической орбиты в форме функции периода математического маятника. В левой части соотношения (61) эксцентриситет можно менять за счет изменения ускорения g в начальной экстремальной точке при неизменных начальных условиях R_0, υ_0. В правой части эксцентриситет можно менять за счет изменения скорости υ в начальной экстремальной точке при неизменных начальных условиях R_0, g_0. Т.е. за счет преобразований в соотношении (61) были изменены начальные условия $\upsilon_0 \to g_0$.

Следует заметить, что формула вычисления периода обращения тела на орбите (52) выводится (9). Другой вариант формулы вычисления периода обращения тела на орбите следует из физических соображений.

по

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{R(\varphi) \cdot d\varphi}{\upsilon(\varphi)} = \int_0^{2\pi} \frac{R_0 \cdot \upsilon_0 \cdot d\varphi}{\upsilon_\varphi \cdot \upsilon(\upsilon)} = \frac{R_0}{\upsilon_0} (1+e)^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(1+e \cdot Cos(\varphi)\right)\left(1+2Cos(\varphi)+e^2\right)^{1/2}}. \qquad (62)$$

Этот интеграл (62) функционально не вычисляется. Его можно вычислить только на вычислительной машине. Для этого была составлена программа ellips на языке FORTRAN и произведено численное вычисление (результат T=). Параллельно численно вычислялся интеграл (52) (результат T1=), а также функция $(1-e^2)^{-1.2245}$ (результат T2=), численное значение которой близко с точностью до одного процента (в пределах изменения эксцентриситета е 1÷9.5)к результату вычисления интеграла (62) (результат T=) . Распечатка вычисления интегралов (62),(52), и функции, заменяющей интеграл (62) приводится ниже.

```
            Программа  ellips
Введите данные: r0,v0,e,n
r0= .1000E+01  v0= .1000E+01  e= .0000E+00  n= 200
T= .6283E+01    T1= .6283E+01    T2= .6283E+01
            Программа   ellips
Введите данные: r0,v0,e,n
r0= .1000E+01  v0= .1000E+01  e= .3000E+00  n= 200
T= .1195E+02    T1= .1223E+02    T2= .1192E+02
```

```
                    Программа  ellips
 Введите данные: r0,v0,e,n
 r0= .1000E+01  v0= .1000E+01  e= .6000E+00  n= 200
 T= .2801E+02    T1= .3142E+02    T2= .2778E+02
                    Программа  ellips
 Введите данные: r0,v0,e,n
 r0= .1000E+01  v0= .1000E+01  e= .9000E+00  n= 200
 T= .1733E+03    T1= .2739E+03    T2= .1733E+03
                    Программа  ellips
 Введите данные: r0,v0,e,n
 r0= .1000E+01  v0= .1000E+01  e= .9500E+00  n= 200
 T= .4040E+03    T1= .7848E+03    T2= .4132E+03
```

Проанализировав результат вычисления, можно прийти к выводу, что если следовать физическим соображениям, в функциональных зависимостях (54), (56), (61) функцию $(1-e^2)^{-3/2}$ необходимо заменить на функцию $(1-e^2)^{-1.2245} = (1-e^2)^{-3/2} \cdot (1-e^2)^{+.2755}$. После этого формулы (54), (56), (61) примут вид

$$T = 2\cdot\pi\frac{R_0}{\upsilon_0}\cdot\frac{\sqrt{1+e}}{\left(\sqrt{1-e}\right)^3}\left(1-e^2\right)^{+.2755}, \tag{63}$$

$$T = 2\pi\sqrt{a_0^3\frac{m}{a}}\cdot\left(1-e^2\right)^{+.2755} = 2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{\gamma M}}\cdot\left(1-e^2\right)^{+.2755} \tag{64}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}\left(1-e\right)^{-3/2}\cdot\left(1-e^2\right)^{+.2755} \tag{65}$$

В работе был представлен вывод функциональных зависимостей для орбит вращения материальной точки массой m в поле центральных гравитационных сил $F_R = -\dfrac{a}{R^2}$. Представляет также интерес рассмотрения такого взаимодействия в поле центральных сил обратно пропорциональных первой степени расстояния от центра силы $F_R = -\dfrac{\alpha}{R}$. По аналогии с соотношениями (14), (15) , компоненты скоростей для такой центральной силы примут следующую функциональную зависимость.

$$\upsilon_x = \upsilon_x^0 - \frac{1}{m}\int_0^{\varphi}\frac{Cos(\varphi)}{\upsilon_\varphi}d\varphi,$$
$$\upsilon_y = \upsilon_y^0 - \frac{1}{m}\int_0^{\varphi}\frac{Sin(\varphi)}{\upsilon_\varphi}d\varphi. \qquad (66)$$

Если принять к сведению, что компоненты скорости в декартовом и круговом базисе связаны такой функциональной зависимостью

$$\upsilon_\varphi = -\upsilon_x \cdot Sin(\varphi) + \upsilon_y \cdot Cos(\varphi), \qquad (67)$$
$$\upsilon_R = \upsilon_x \cdot Cos(\varphi) + \upsilon_y \cdot Sin(\varphi),$$

то можно прийти к выводу, что интегралы в соотношениях (66) в общем аналитическом виде не решаются. Интегралы можно решить в частном случае, когда выполняется условие

$$\upsilon_\varphi = \upsilon_í^0 = Cons\tan ta, \quad \upsilon_R = 0, \quad \upsilon_x^0 = 0. \qquad (68)$$

В результате решения интегралов, компоненты скорости (66) примут следующую функциональную зависимость.

$$\upsilon_x = -\frac{\alpha}{m}\cdot\frac{Sin(\varphi)}{\upsilon_\varphi}$$
$$\upsilon_y = \upsilon_\varphi + \frac{\alpha}{m}\cdot\frac{Cos(\varphi)-1}{\upsilon_\varphi}. \qquad (69)$$

Подставив значения функций для компонент скорости (69) в функциональные зависимости (67), получим

$$\upsilon_\varphi = \frac{\alpha}{m}\cdot\frac{Sin^2(\varphi)}{\upsilon_\varphi} + \upsilon_\varphi \cdot Cos(\varphi) + \frac{\alpha}{m}\cdot\frac{Cos^2(\varphi) - Cos(\varphi)}{\upsilon_\varphi}, \qquad (70)$$
$$\upsilon_\varphi^2 = \frac{\alpha}{m}$$
$$\upsilon_R = -\frac{\alpha}{m}\cdot\frac{Sin(\varphi)\cdot Cos(\varphi)}{\upsilon_\varphi} + \upsilon_\varphi \cdot Sin(\varphi) + \frac{\alpha}{m}\cdot\frac{\left(Cos(\varphi)-1\right)\cdot Sin(\varphi)}{\upsilon_\varphi}. \qquad (71)$$
$$\upsilon_R = 0$$

Проанализировав результат решения , можно прийти к выводу, что при силе взаимодействия масс обратно пропорциональной первой степени радиуса единственной замкнутой орбитой является круговая орбита со скоростью на орбите не зависящей от радиуса орбиты и массы тела на орбите.

$$\upsilon_\varphi = \sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \sqrt{\gamma M} \qquad (72)$$

Удвоенная кинетическая энергия тела на орбите равна

$$m\cdot \upsilon_{\varphi}^{2}=\alpha \qquad (73)$$

потенциальной энергии (для центральной силы -$\frac{\alpha}{R}$). Соотношение (73) аналогично соотношению (28). Соотношение на орбите между кинетической энергией, силой и радиусом кривизны такое же как и в соотношении (29)

$$\frac{m\cdot \upsilon_{\varphi}^{2}}{R}=F(R)=\frac{\alpha}{R}. \qquad (74)$$

Если силу F на круговой орбите обозначить как произведение массы на ускорение

$$F=-\frac{\alpha}{R}=-m\cdot g \ , \qquad (75)$$

то из соотношений (74), (75) следует

$$\upsilon_{\varphi}=\sqrt{Rg} \qquad (76)$$

соотношение аналогичное (60). В данном случае в подкоренном выражении произведение есть величиной постоянной.

Период обращения тела на круговой орбите

$$T=2\pi\frac{R}{\upsilon_{\varphi}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (77)$$

также функционально совпадает с известным соотношением (61).

Чтобы доказать, что совпадение формул (74) и (29), (76) и (60), (77) и (61) для различных сил взаимодействия не случайно, рассмотрим взаимодействие масс m и M с силой F, не зависящей от расстояния между ними (постоянной величиной)

$$F=-\beta. \qquad (78)$$

Интегральные уравнения для компонент скорости тела на орбите (учитывая последовательность вывода для предыдущих типов взаимодействия) имеют следующую функциональную зависимость

$$\begin{aligned}\upsilon_{x}&=-\frac{\beta}{m}\int_{0}^{\varphi}\left(\frac{R}{\upsilon_{\varphi}}\right)Cos(\varphi)\cdot d\varphi\\ \upsilon_{y}&=\upsilon_{y}^{0}-\frac{\beta}{m}\int_{0}^{\varphi}\left(\frac{R}{\upsilon_{\varphi}}\right)Sin(\varphi)\cdot d\varphi\end{aligned} \qquad (79)$$

Решить эту систему интегральных уравнений можно при условии нахождения тела на стационарной орбите, когда

$$\left(\frac{R}{\upsilon_\varphi}\right) = Cons\tan ta \tag{80}$$

Результат решения

$$\begin{gathered}\upsilon_x = -\frac{\beta}{m}\left(\frac{R}{\upsilon_\varphi}\right)Sin(\varphi)\\ \upsilon_y = \upsilon_y^0 + \frac{\beta}{m}\left(\frac{R}{\upsilon_\varphi}\right)\left(Cos(\varphi)-1\right)\end{gathered} \tag{81}$$

Подставив полученные функциональные зависимости (81) в соотношения (67) получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\upsilon_\varphi = \frac{\beta}{m}\cdot\frac{Sin^2(\varphi)}{\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right)} + \upsilon_y^0\cdot Cos(\varphi) + \frac{\beta}{m}\cdot\frac{Cos^2(\varphi)-Cos(\varphi)}{\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right)}\\ \upsilon_R = -\frac{\beta}{m}\cdot\frac{Sin(\varphi)\cdot Cos(\varphi)}{\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right)} + \upsilon_y^0\cdot Sin(\varphi) + \frac{\beta}{m}\cdot\frac{\left(Cos(\varphi)-1\right)Sin(\varphi)}{\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right)}\end{gathered} \tag{82}$$

где неизвестными являются $\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right), \quad \upsilon_R$..

Результат решения для круговой орбиты

$$\begin{gathered}\upsilon_y^0\cdot\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right) = \frac{\beta}{m}, \quad \upsilon_R = 0,\\ \upsilon_\varphi\cdot\left(\frac{\upsilon_\varphi}{R}\right) = \frac{\beta}{m}, \quad \upsilon_\varphi = \upsilon_y^0.\end{gathered} \tag{83}$$

Из соотношения (83) сразу следует

$$\frac{m\cdot\upsilon_\varphi^2}{R} = F = \beta \tag{84}$$

соотношение между кинетической энергией, крутизной орбиты и центральной силой, которое выполняется для тела на круговой орбите радиусом R (аналогия (29), (74) для других сил взаимодействия). Умножив левую и правую часть соотношения (84) на радиус R, получим известный результат для других сил взаимодействия (28),(73), что удвоенная кинетическая энергия равна потенциальной

$$m\cdot\upsilon_\varphi^2 = F\cdot R \tag{85}$$

Обозначив силу F как произведение массы m на ускорение g из формулы (84) получим соотношение для скорости тела, находящегося на круговой орбите

$$\upsilon_{\varphi} = \sqrt{R \cdot g} \qquad (86)$$

по форме совпадающее для других сил взаимодействия (60), (76).

Подставив значение скорости (86) в формулу для периода обращения тела на круговой орбите, получим известное соотношение для других сил взаимодействия (61), (77)

$$T = 2\pi \frac{R}{\upsilon_{\varphi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (87)$$

В итоге можно сказать следующее: было рассмотрено движение материальной точки массой m по круговой орбите в поле центральных сил трех типов $F_2 = -\frac{a}{R^2}$, $F_1 = -\frac{\alpha}{R}$, $F_0 = -\beta$. Было найдено соотношение между кинетической энергией, силой взаимодействия на орбите и радиусом орбиты, которое необходимо выполнять, чтобы тело находилось на стационарной круговой орбите. Формула этого соотношения для трех типов центральных сил одна и та же и не зависит от типа взаимодействия, включая промежуточные значения.

$$\frac{m \cdot \upsilon_{\varphi}^2}{R} = F \qquad (88)$$

Из этого главного соотношения следует, как следствие, формула для скорости тела на орбите

$$\upsilon_{\varphi} = \sqrt{R \cdot g}\,, \qquad (89)$$

а также формула для периода обращения тела на орбите

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}\,, \qquad (90)$$

которые справедливы для всех рассмотренных типов центральных сил взаимодейсивия.

Если равенство (88) на орбите не выполняется, круговые орбиты превращаются в эллиптические. Для центральной силы F_2 эллиптические орбиты замкнуты (орбиты замыкаются сами на себя). Для центральных сил F_1, F_0 в случае неравенства (88) задача не решается. Это связано с тем, что орбиты принимают какуюто произвольную форму и не замыкаются сами на себя (орбиты незамкнуты).

Для центральной силы F_2 задача имеет решение даже в случае неравенства (88). Для этой силы взаимодействия была полностью решена задача, найдены координатные, скоростные, энергетические, временные характеристики нахождения тела на орбите в зависимости от начальных параметров и характеристических параметров орбиты.

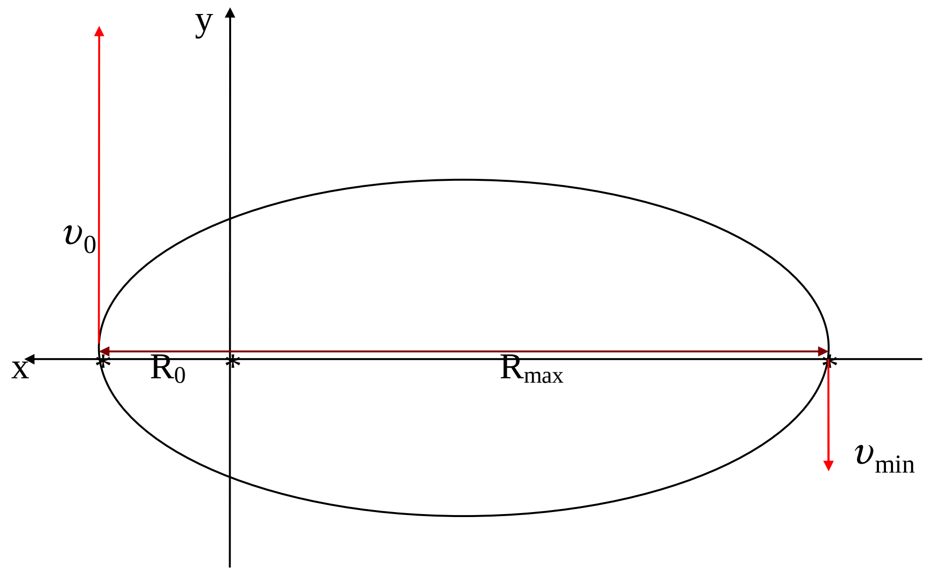

Рис. 2

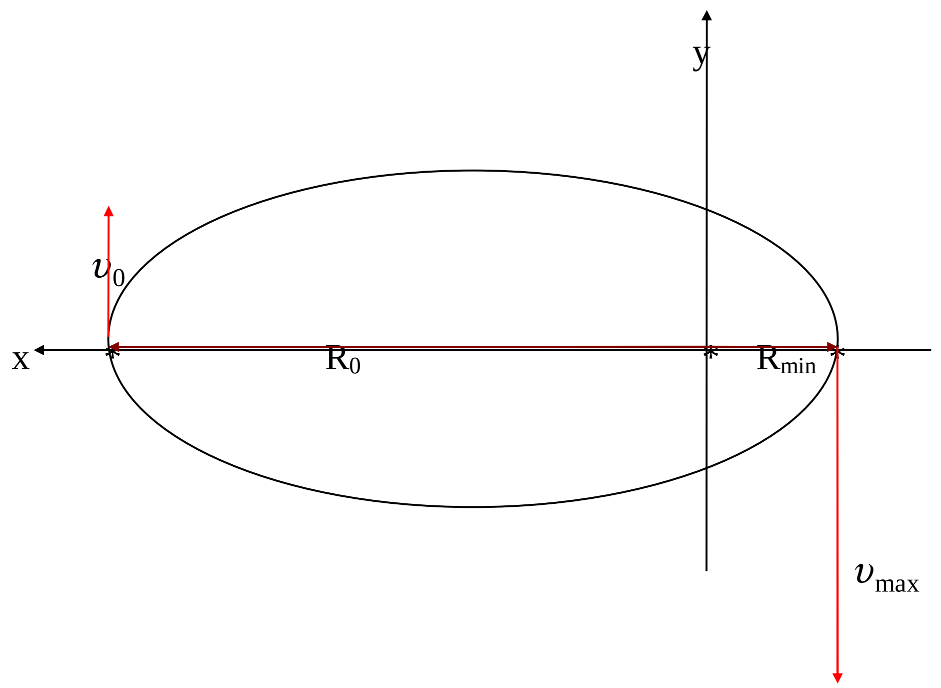

Рис. 3

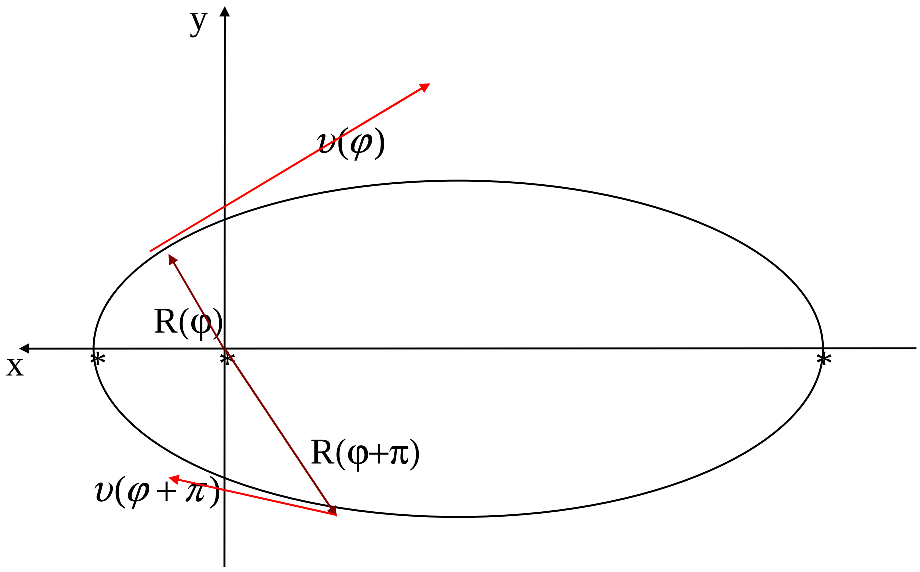

Рис. 4

Литература

1. Ю.И. Косинский, Энергия материальной точки, 1, (2001).
2. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев, Справочник по математике, 371, (1962).