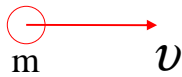


Энергия материальной точки



На тело (материальная точка) массой m , имеющее скорость v и ускорение a действует сила [1]:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (1)$$

откуда следует $\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt}$. Если сила действует в течении времени t , то то интегрированием можем получить:

$$\frac{1}{m} \cdot \int_0^t F(t') \cdot dt' = -v_0 + v(t) = \frac{ds}{dt} - v_0. \quad (2)$$

Из (2) следует соотношение для дифференциала пути s

$$ds = v_0 \cdot dt + \frac{1}{m} \cdot dt \cdot \int_0^t F(t') \cdot dt'. \quad (3)$$

По определению энергия приобретенная телом на пути S равна:

$$E = \int_0^S F \cdot ds = v_0 \cdot \int_0^t F(t') \cdot dt + \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F(t') \cdot dt' \cdot \int_0^{t'} F(t'') \cdot dt'' \quad (4)$$

С помощью метода интегрирования по частям вычислим интеграл под знаком интеграла в (4).

$$\int_0^t F(t') \cdot dt' \cdot \int_0^{t'} F(t'') dt'' = \left[\int_0^t F(t') \cdot dt' \right] \cdot \int_0^{t'} F(t'') \cdot dt'' - \int_0^t F(t') \cdot dt' \cdot \int_0^0 F(t'') \cdot dt'' \quad (5)$$

Из соотношения (5) находим:

$$\int_0^t F(t') \cdot dt' \cdot \int_0^{t'} F(t'') \cdot dt'' = \frac{1}{2} \cdot \left[\int_0^t F(t') \cdot dt' \right]^2 = \frac{1}{2} \cdot I^2(t) \quad (6)$$

Через $I(t)$ мы обозначили момент количества движения или импульс силы $F(t)$, приобретенный телом под действием этой силы в течении времени t . Теперь соотношения (2), (4) примут вид:

$$v(t) = v_0 \pm \frac{I(t)}{m}, \quad (7)$$

$$E(t) = v_0 \cdot I(t) \pm \frac{I^2(t)}{2 \cdot m}, \quad (8)$$

где знак \pm указывает на ускорение или торможение соответственно.

1. Тело ускоряется с неподвижного состояния. $v_0 = 0$. Из соотношений (7), (8) следует: $I(t) = m \cdot v(t)$, $E(t) = \frac{m \cdot v^2(t)}{2}$.

2. Тело движется со скоростью v_0 равномерно при отсутствии внешних сил. При этом $I(t) = m \cdot v_0$, $E(t) = \frac{m \cdot v_0^2}{2}$.

3. На тело со скоростью v_0 действует тормозящая сила. Из соотношений (7), (8) следует: $I(t) = m \cdot (v_0 - v(t))$,

$$E(t) = \frac{m \cdot v_0^2}{2} - \frac{m \cdot v^2(t)}{2}.$$

4. На тело со скоростью v_0 действует ускоряющая сила. Из соотношений (7), (8) следует: $I(t) = m \cdot (v(t) - v_0)$,

$$E(t) = \frac{m \cdot v^2(t)}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}.$$

Соотношения для энергии 1.-4. можно получить также другим сугубо математическим способом.

$$E(t) = \int_0^s F(t) \cdot ds = m \cdot \int_0^s \frac{d^2s}{dt^2} \cdot ds = m \cdot \int_0^s \frac{d(ds)}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = m \cdot \int_0^s \frac{ds}{dt} \cdot d\left(\frac{ds}{dt}\right) = m \cdot \int_{v_0}^{v(t)} v(t') \cdot dv(t')$$

$$= \left[\frac{m \cdot v^2(t')}{2} \right]_{v_0}^{v(t)} = \frac{m \cdot v^2(t)}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2}.$$

Литература

1. Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, Справочник по физике, 39, (1968).