Косинский Юрий Иванович

Вывод формулы вычисления π из определения окружности.

По определению [1] окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра).

Отношение длины окружности к диаметру составляет примерно 3 1/7. Точное отношение L/d обозначается греческой буквой π, а длина окружности выражается простой формулой

$$L=\pi\cdot d$$

где- L - длина окружности

d -диаметр окружности

Следует заметить, что теоретической формулы для вычисления π из определения окружности не следует.

Если взять за определение окружности следующую формулировку: окружность есть геометрическое место точек равнобедренного многостороннего многоугольника на плоскости, стороны которого равноудалены от одной точки (центра), при этом многоугольник превращается в окружность, когда количество сторон N многоугольника стремится к ∞.

Исходя из нового определения, выведем формулу вычисления периметра многоугольника как функцию диаметра окружности вписанного многоугольника и количества его сторон.

Минимальное четное количество сторон многоугольника n=4 (Рис.1).

Минимальное нечетное количество сторон n=3 (Рис.1).

Для четырехугольника (первое приближение к окружности) получим:

$$L_1=4\cdot r\cdot\sqrt{2}=4\cdot l_4 \qquad (1)$$

где L_1 - длина периметра многоугольника (первое приближение)

l_4 -длина стороны четырехугольника.

Удвоим количество сторон, согласно Рис.1. Из теоремы синусов [2] следует:

$$l_8/\mathrm{Sin}(\alpha)=r/\mathrm{Sin}(\gamma)\ , \qquad (2)$$

откуда получим:

$$L_2=8\cdot l_8=8\cdot r\cdot \mathrm{Sin}(\alpha_o/2)/\mathrm{Sin}(\gamma)\ , \qquad (3)$$

где $\alpha_0=90^0$

Выразим угол γ через величину α_0

$$\gamma=(180^o - \alpha)/2=90^o - \alpha/2=90^o - \alpha_o/4 \qquad (4)$$

$$\mathrm{Sin}(\gamma)=\mathrm{Sin}(90^o - \alpha_o/4)=\mathrm{Cos}(\alpha_o/4) \qquad (5)$$

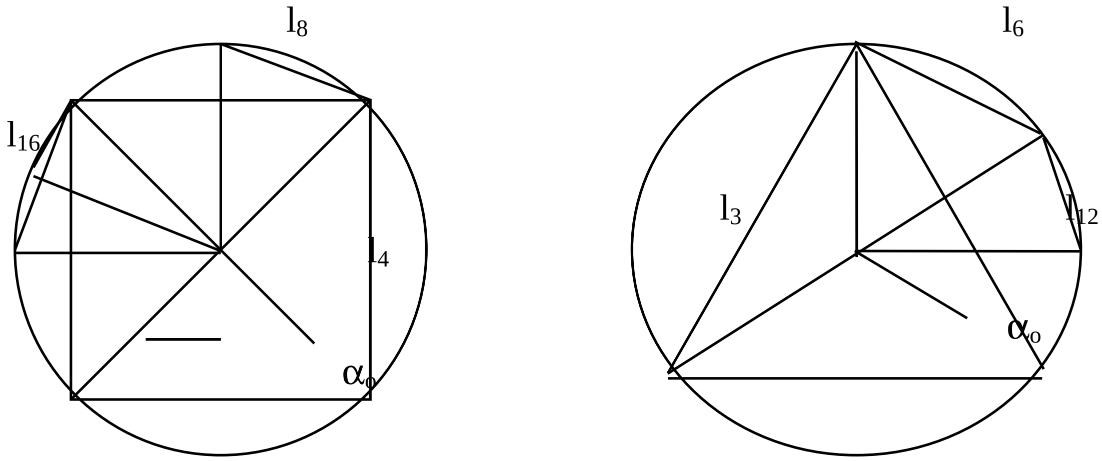

Рис. 1

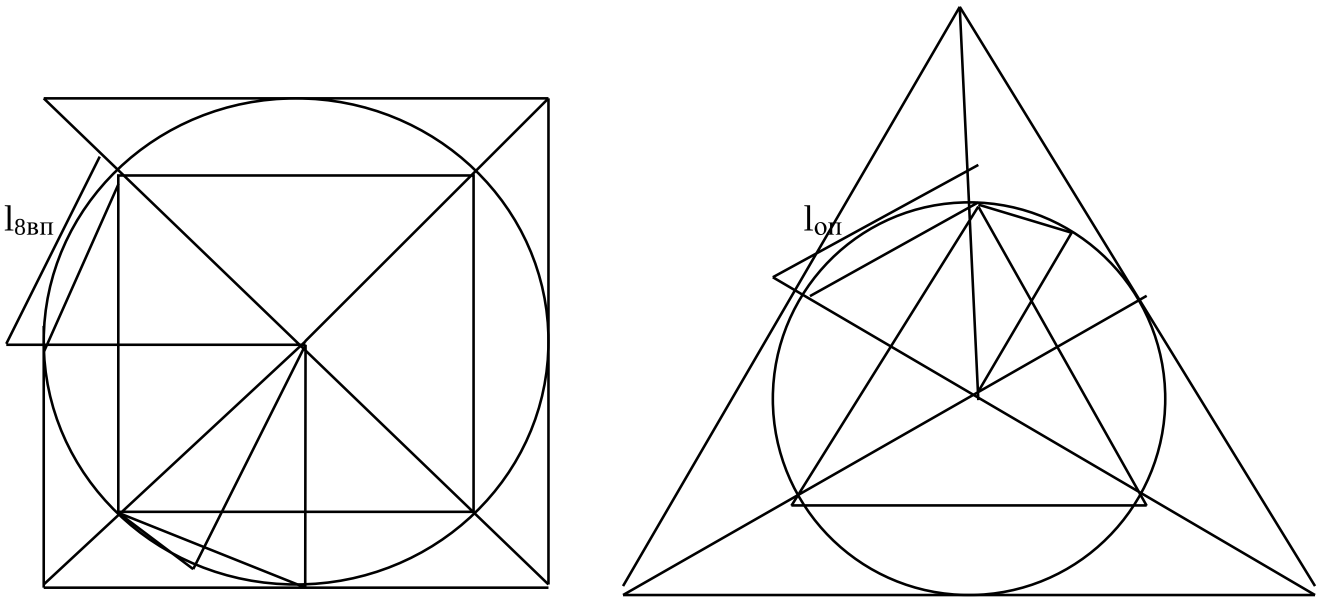

Рис.2

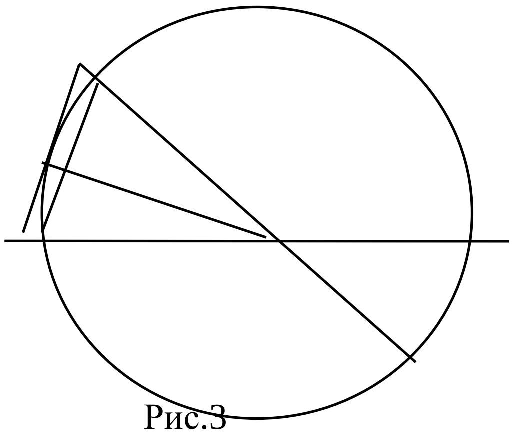

Рис.3

Второе приближение примет вид:

$$L_2=8\cdot r\cdot \mathrm{Sin}(\alpha_o/2)/\mathrm{Cos}(\alpha_o/4)\ , \qquad (6)$$

где α_o начальный угол.

В дальнейшем при многократном удвоении можем записать:

$$L_n=2\cdot r\cdot 2^n\cdot \mathrm{Sin}(\alpha_o/2^{(n-1)})/\mathrm{Cos}(\alpha_o/2^n). \qquad (7)$$

Поделив периметр на диаметр окружности, получим n -приближение для величины π:

$$\pi_n=2^n\cdot \mathrm{Sin}(\alpha_o/2^{(n-1)})/\mathrm{Cos}(\alpha_o/2^n) \qquad (8)$$

Если решать соотношение (8) в таком виде, как оно есть, то мы получим функциональное выражение для π_n в зависимости от значения π, так как $\alpha_o=\pi/4$, которое будем считать нам неизвестно. Поэтому для каждого приближения в (8) приведем к арифметическому виду все тригонометрические функции, используя функции половинного угла [3].

$$\pi_2=2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})}} \qquad (9)$$

$$\pi_3=2^3\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-\sqrt{1/2})}}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})}} \qquad (10)$$

$$\pi_4=2^4\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})}}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})})}} \qquad (11)$$

$$\pi_5=2^5\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})})}}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})})})}} \qquad (12)$$

Сократим числитель и знаменатель на $\sqrt{1/2}$

$$\pi_5=2^5\cdot\sqrt{\frac{1-\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})}}{1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})})}}} \qquad (13)$$

Переобозначим соотношение (13)

$$\pi_5=2^5\cdot\sqrt{\frac{1-A_5}{1+B_5}}\ , \qquad (14)$$

где $$A_5=\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})} \qquad (14^A)$$

$$B_5=\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})})} \qquad (14^B)$$

В общем случае

$$\pi=\pi_n=2^n\cdot\sqrt{\frac{1-A_n}{1+B_n}}\ , \qquad (15)$$

$$n\to\infty$$

где количество граней зависит отстепени приближения такой зависимостью:

$$N=2\cdot 2^n \qquad (16)$$

Параметры A_n и B_n связаны между собой такой зависимостью:

$$A_n=B_{n-1}\ , \qquad A_n=\sqrt{1/2\cdot(1+A_{n-1})}\,,$$

$$B_n=\sqrt{1/2\cdot(1+B_{n-1})}\ , \qquad B_n=\sqrt{1/2\cdot(1+A_n)}\,, \quad n\geq 3 \qquad (17)$$

Если сравнить известные формулы вычисления π и формулу , полученную в данной работе :

$$\pi=6\cdot\mathrm{Arcsin}(1/2)>4\cdot\mathrm{Arcsin}(\sqrt{2}/2)>3\cdot\mathrm{Arcsin}(\sqrt{3}/2) \qquad (18)$$

$$\pi=\lim\frac{Sn}{d}=\lim 2^n\cdot\sqrt{\frac{1-A_n}{1+B_n}}=\lim\frac{N\cdot l_N}{d}\,, \qquad (19)$$

$$n\to\infty$$

можно отметить, что известный вывод вычисления π из определения окружности не следует, а также, если использовать для вычисления π различные функции из соотношения (18) [4] мы будем получать различные значения согласно знака > при одинаковой точности вычисления (точно функция Arcsin не вычисляется).

Ясно, что при $n\to\infty$, $N\to\infty$, $l_N\to 0$, так как A_n и $B_n\to 1$,

где n - порядок приближения (удвоения),

N - количество граней многоугольника.

Следует отметить, что предел в (19) математически не вычисляется, поэтому минуя громоздкость формул, используя рекурентные соотношения, вычисление можно произвести только на ЕВМ.

Напомним, что в приведенном выше выводе, за основу был взят четырехугольник с начальным углом 90^0, ниже мы представим вывод формулы π, где за основу будет взят треугольник с начальным углом $\alpha_{03}=60^0$

$$L_0 = 3 \cdot l_3 = 3 \cdot \frac{Sin(120^0) \cdot r}{Sin(30^0)} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r \,. \qquad (20)$$

Первое приближение:

$$L_1 = 6 \cdot l_6 = 6 \cdot r \frac{Sin(60^0)}{Sin(60^0)} = 6 \cdot r \,. \qquad (21)$$

Второе приближение:

$$L_2 = 12 \cdot l_{12} = 12 \cdot r \cdot \frac{Sin(\alpha_{03}/2)}{Sin(\gamma)} = 12 \cdot \frac{Sin(\alpha_{03}/2)}{Cos(\alpha_{03}/4)}, \qquad (22)$$

где $\alpha_{03} = 60^0$.

В дальнейшем при многократном удвоении запишем:

$$L_n = 2 \cdot r \cdot 3 \cdot 2^{(n-1)} \cdot \frac{Sin(\alpha_{03}/2^{(n-1)})}{Cos(\alpha_{03}/2^n)}, \qquad (23)$$

откуда следует n приближение для π

$$\pi_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \frac{Sin(\alpha_0/2^{(n-1)})}{Cos(\alpha_0/2^n)} \qquad (23^A)$$

Используя функции половинного угла, запишем:

$$\pi_1 = 3$$

$$\pi_2 = \frac{1./2}{\sqrt{1/2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \sqrt{3})}} \cdot 6$$

$$\pi_3 = \frac{\sqrt{1/2 \cdot (1 - 1/2 \cdot \sqrt{3})}}{\sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \sqrt{3})})}} \cdot 12$$

$$\pi_4 = \frac{\sqrt{1/2 \cdot (1 - \sqrt{1/2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \sqrt{3})})}}{\sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \sqrt{3})})})}} \cdot 24 \qquad (24)$$

$$\pi_5 = \frac{\sqrt{1/2 \cdot (1 - \sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \sqrt{3})})})}}{\sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + \sqrt{1/2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \sqrt{3})})})})}} \cdot 48$$

После сокращения формула примет вид:

$$\pi_5 = 3 \cdot 2^4 \cdot \sqrt{\frac{1-\sqrt{1./2 \cdot (1+\sqrt{1/2 \cdot (1+1/2 \cdot \sqrt{3})})}}{1+\sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{1/2 \cdot (1+1/2 \cdot \sqrt{3})})})}}} \qquad (25)$$

Переобозначим:

$$\pi_5 = 3 \cdot 2^4 \cdot \sqrt{\frac{1-A_5}{1+B_5}}, \qquad (26)$$

где $A_5 = \sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{0.75})})}$,

$$B_5 = \sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{1/2 \cdot (1+\sqrt{0.75})})})}. \qquad (27)$$

В общем случае

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n = 3 \cdot 2^{(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{1-A_n}{1+B_n}}, \qquad (28)$$

где количество граней зависит от степени приближения n так:

$$N=3\cdot 2^{(n-1)}$$

(29)

Для функций A_n и B_n рекурентные соотношения остались те же, что и в (17).

Теперь выведем формулу вычисления периметра описанного в окружность многоугольника для минимального четного и нечетного количества сторон.

Из Рис.2 следует, что сторона описанного многоугольника $l_{оп}$ связана со стороной вписанного многоугольника $l_{вп}$ определенным соотношением. Найдем эту связь из соотношений, которые следуют из подобия треугольников на Рис.2.

$$l_{оп}./2\cdot r = tg(\alpha/2), \qquad l_{вп}/2\cdot r = Cos(\gamma) \qquad (30)$$

Используя соотношение (22), (4), получим

$$l_{оп}=l_{вп} / Cos(\alpha/2)$$

(31)

для любой стороны как четного так и нечетного многоугольника.

Используя соотношения (1) - (15), (31) по аналогии запишем соотношения для четного описанного многоугольника:

$$\pi_{1оп}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{Cos(45^0)}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2/2}}=4$$

(32)

$$\pi_{2оп}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1/.2(1+\sqrt{1/2})}}\cdot\frac{1}{Cos(90^0/4)}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})}}=$$

$$=2^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{1/2}}=2^3\cdot\frac{\sqrt{1/2}}{1+\sqrt{1/2}} \qquad (33)$$

$$\pi_{3оп}=2^4\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-\sqrt{1/2})}}{1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})}} \qquad (34)$$

$$\pi_{4оп}=2^5\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})}}{1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2})})}} \qquad (35)$$

В общем случае:

$$\pi_{nоп}=2^{(n+1)}\cdot\frac{\sqrt{0.5\cdot(1-A_n)}}{1+B_n} \qquad (36)$$

Значения A_n и B_n отражены в формулах (14) - (17).

Выпишем соотношения для нечетного описанного многоугольника. Для этого воспользуемся соотношениями (20) - (28), (31).

$$\pi_{0оп}=3/2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{Cos(60^0)}=3\cdot\sqrt{3} \qquad (37)$$

$$\pi_{1оп}=3\cdot\frac{1}{Cos(30^o)}=2\cdot\sqrt{3} \qquad (38)$$

$$\pi_{2оп}=\frac{1/2\cdot 6}{\sqrt{1/2\cdot(1+1/2\cdot\sqrt{3})}}\cdot\frac{1}{Cos(60^o/4)}=\frac{6}{1+1/2\cdot\sqrt{3}} \qquad (39)$$

$$\pi_{3оп}=12\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-1/2\cdot\sqrt{3})}}{\sqrt{1/2\cdot(1+\sqrt{1/2\cdot(1+1/2\cdot\sqrt{3})})}}\cdot\frac{1}{Cos(60^o/8)}=24\cdot\frac{\sqrt{1/2\cdot(1-1/2\cdot\sqrt{3})}}{1+\sqrt{1/2\cdot(1+1/2\cdot\sqrt{3})}}$$

(40)

$$\pi_{4оп} = 48 \cdot \frac{\sqrt{1/2 \cdot \left(1 - \sqrt{1/2 \cdot \left(1 + 1/2 \cdot \sqrt{3}\right)}\right)}}{1 + \sqrt{1/2 \cdot \left(1 + \sqrt{1/2 \cdot \left(1 + 1/2 \cdot \sqrt{3}\right)}\right)}} \tag{41}$$

Сделаем переобозначения в (41)

$$\pi_{4оп} = 3 \cdot 2^4 \cdot \frac{\sqrt{0.5 \cdot (1 - A_4)}}{1 + B_4}, \tag{42}$$

где - $A_4 = \sqrt{1/2 \cdot \left(1 + \sqrt{0.75}\right)}$

$$B_4 = \sqrt{1/2 \cdot \left(1 + \sqrt{1/2 \cdot \left(1 + \sqrt{0.75}\right)}\right)} \tag{43}$$

В общем случае:

$$\pi = \pi_{nоп} = 3 \cdot 2^n \cdot \frac{\sqrt{0.5 \cdot (1 - A_n)}}{1 + B_n} \tag{44}$$

$$n \to \infty$$

Для функций A_n и B_n рекурентные соотношения остались те же, что и в (17).

В итоге можно сказать, что из определения окружности были получены четыре формулы вычисления π для вписанного и описанного многоугольника, где за основу было взято как четное так и нечетное минимальное количество сторон многоугольника. Еще раз выпишем эти формулы: для четного минимального многоугольника

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{vp} = \lim 2^n \cdot \sqrt{\frac{1 - A_n}{1 + B_n}} \\ &\pi_{op} = \lim 2^{(n+1)} \cdot \frac{\sqrt{0.5 \cdot (1 - A_n)}}{1 + B_n} \\ &n \to \infty \end{aligned}\right\}, \tag{45}$$

а также для нечетного минимального многоугольника

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{vp} = \lim 3 \cdot 2^{(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{1-A_n}{1+B_n}} \\ &\pi_{op} = \lim 3 \cdot 2^{n} \cdot \frac{\sqrt{0.5 \cdot (1-A_n)}}{1+B_n} \\ &n \to \infty \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

где значения функций A_n и B_n отражены в формулах (14)-(17), (26), (27). Рекурентные соотношения (17) удобно использовать при составлении программ на фортране для определения численного значения π. При этом программы имеют компактный вид и длина их не зависит от степени приближения n.

Ясно, что при определении численного значения π с помощью ЕВМ согласно формул (45), (46) при увеличении порядка приближения $\pi_{вп}$ должно постоянно расти, а $\pi_{оп}$ постоянно уменьшаться, приближаясь к истинному значению π и переходя в насыщение, так как число разрядов точности ограничено (в нашем случае ЕВМ имеет 15 разрядов точности) . Именно от того, что точность вычисления числа на ЕВМ ограничена количеством разрядов, и возникают проблеммы вычисления π на ЕВМ. Следует также отметить, что формулы вычисления π (45), (46) имеют точное значение для конкретного числа приближения n. Приближением является лишь $n\to\infty$, когда вычисляемое π_n приближается к истинному значению π.

Литература

1. М.Я. Выгодский, “Справочник по элементарной математике”, 1965год. стр.287,
2. И.Н. Бронштейн и К.А. Семендяев, “Справочник по математике”, 1962год, стр.186.
3. И.Н. Бронштейн и К.А. Семендяев, “Справочник по математике”, 1962год, стр.183.
4. И.Н. Бронштейн и К.А. Семендяев, “Справочник по математике”, 1962год, стр.181.