Косинский Ю.И.

Проблеммы определения численного значения π с помощью ЕВМ.

Итак из статьи “Вывод формулы для вычисления π из определения окружности” было выяснено, что существует истинное π, которое находится в вилке между $\pi_{вп}$ и $\pi_{оп}$ (формулы (45), (46)).

Также существует численное значение π, которое можно получить из общеизвестных формул для Sin(α)=C, где $\alpha=30^0,45^0,60^0$,а значение C=1/2, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$ соответственно. Вычисляя из этих формул Arcsin, который, как известно, не берется точно, а с определенной точностью приближения, можно получить численное значение π.

К этому следует добавить, что существует общеизвестное Pi, численное значение которого можно взять, обратившись к INTERNET, с любой степенью точности (любое количество разрядов после запятой). Из какой формулы этот результат можно получить, INTERNET не оговаривает. Выпишем это значение Pi[100], например, для 100 разрядов после запятой.

Pi[100]=
~~3.141592653589793~~2384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679. . . . . . .

Во-первых, разберемся с вычислением π, которое можно получить трижды (для различных углов), вычисляя Arcsin с наперед заданной точностью с использованием формул разложения функций в ряд Фурье. При составлении программы вычисления Arcsin на языке FORTRAN удовно использовать слагаемые разложения не на прямую, как они записаны в справочнике [1]:

$$\mathrm{Arcsin}(x)=x+x^3/(2\cdot3)+1\cdot3\cdot x^5/(2\cdot4\cdot5)+1\cdot3\cdot5\cdot x^7/(2\cdot4\cdot6\cdot7)+\ldots$$
$$\ldots1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2\cdot n-1)\cdot x^{2n+1}/(2\cdot4\cdot6\ldots(2\cdot n)\cdot(2\cdot n+1)), \qquad (47)$$

а применять модернизированный ряд Фурье, в котором слагаемые записываются через рекурентные соотношения:

$$\mathrm{Arcsin}(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n, \qquad a_1=x, \qquad a_{n+1}=a_n\cdot\frac{x^2\cdot(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot(n-1)+1)}{2\cdot n\cdot(2\cdot n+1)}. \qquad (48)$$

Непосредственной подстановкой значений n можно убедиться, что слагаемые в (47) и (48) совпадают по величине.

Программа, записанная на языке FORTRAN, с использованием рекурентных соотношений прилагается. С помощью программы вычисляется значение π с любой наперед заданной точностью, но не выше разрядности ЕВМ. Программы составлены для трех углов 30^0, 45^0, 60^0, значение Sin которых вычисляется без привлечения π и известно как 1/2, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$ соответственно.

Демонстрируем распечатку результата вычисления этих программ:

Программа SIN(Pi/6)=1/2

```
Введите данные: c
c= .000000000000100000
n=   19    PI=3.141592653589747000    a= .000000000000025969
```

Программа SIN(Pi/6)=1/2

```
Введите данные: c
c= .000000000000010000
n=   20    PI=3.141592653589783000    a= .000000000000005997
```

Программа SIN(Pi/6)=1/2

```
Введите данные: c
c= .000000000000001000
n=   22    PI=3.141592653589794000    a= .000000000000000324
```

Где c- наперед заданная точность

a - точность при вычислении, которая должна быть выше заданной

n - количество слагаемых, участвующих в вычислении для достижения желаемой точности

Pi - результат вычисления π

Проанализировав результат вычисления можно прийти к выводу, что с увеличением точности результат вычисления Pi растет, так как ряд Фурье знакоположительный, также растет количество слагаемых, участвующих в вычислении. И самый главный вывод заключается в том, что был получен результат вычисления π (в15 разряде после запятой при точности $1\cdot10^{-15}$) выше, чем общеизвестный результат получаемый из INTERNET (При точности $1\cdot10^{-100}$). Т.е. , если будет наращиваться точность, результат можно получить еще выше.

Продолжим демонстрацию результата вычислений π для различных углов при одной и той же точности.

Программа SIN(Pi/6)=1/2

```
Введите данные: c
c= .000000000000001000
n=   22    PI=3.141592653589794000    a= .000000000000000324
```

Программа SIN(Pi/4)=SQRT(2)/2

```
Введите данные: c
c= .000000000000001000
n=   41    PI=3.141592653589790000    a= .000000000000000706
```

Программа SIN(Pi/3)=SQRT(3)/2

Введите данные: c

c= .000000000000001000

n= 93   PI=3.141592653589783000   a= .000000000000000881

Протокол вычислений π программами для различных углов с одной и той же точностью показывает, что с уменьшением угла величина вычисляемого π увеличивается. Результат удивительный, так как ни одну из формул нельзя опровергнуть, и поэтому результаты вычислений должны совпадать. Причиной, вероятно, являются остаточные ряды, которые находятся за пределами точности,имеют конкретную величину и не учитываются. Суммарня величина их различна для разных углов Arcsin, поэтому при вычислениях получаются различные значения π.

Где же в этих формулах находится истинное π ? Наверное, при вычислениях с углом, близким к нулю. К сожалению, нет такого угла,близкого к нулю, Sin которого был бы известен в радикалах.

Ответ на этот вопрос и решение дает вывод формулы для вычисления π из определения окружности. При устремлении количества сторон вписанного в окружность многоугольника в ∞ угол треугольника, опирающегося на сторону многоугольника, стремится к нулю .При этом формула численного значения длины стороны многоугольника записывается через радикалы (не зависит от π). По формулам, выведенным из определения окружности, были составлены программы на языке FORTRAN с применением рекурентных соотношений.

Протоколы вычислений по этим программам демонстрируем ниже.

Таблица 1.

PROGRAM Pi2N

ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ: n

n= 20

		>	>
k= 1	PI_{CP}=3.41421356237310	$PI_{ВП}$=2.82842712474619	$PI_{ОП}$=4.00000000000000
k= 2	PI_{CP}=3.18758797895274	$PI_{ВП}$=3.06146745892072	$PI_{ОП}$=3.31370849898476
k= 3	PI_{CP}=3.15202151516629	$PI_{ВП}$=3.12144515225805	$PI_{ОП}$=3.18259787807453
k= 4	PI_{CP}=3.14413669898760	$PI_{ВП}$=3.13654849054594	$PI_{ОП}$=3.15172490742926
k= 5	PI_{CP}=3.14222477110033	$PI_{ВП}$=3.14033115695475	$PI_{ОП}$=3.14411838524591
k= 6	PI_{CP}=3.14175044043760	$PI_{ВП}$=3.14127725093276	$PI_{ОП}$=3.14222362994244
k= 7	PI_{CP}=3.14163208515662	$PI_{ВП}$=3.14151380114429	$PI_{ОП}$=3.14175036916895
k= 8	PI_{CP}=3.14160251053498	$PI_{ВП}$=3.14157294036694	$PI_{ОП}$=3.14163208070303
k= 9	PI_{CP}=3.14159511776778	$PI_{ВП}$=3.14158772527795	$PI_{ОП}$=3.14160251025760
k= 10	PI_{CP}=3.14159326963320	$PI_{ВП}$=3.14159142151400	$PI_{ОП}$=3.14159511775239
k= 11	PI_{CP}=3.14159280759315	$PI_{ВП}$=3.14159234556355	$PI_{ОП}$=3.14159326962274

k= 12 PI_{CP}=3.14159269213322 $PI_{ВП}$=3.14159257662583 $PI_{ОП}$=3.14159280764060
k= 13 PI_{CP}=3.14159266317554 $PI_{ВП}$=3.14159263429870 $PI_{ОП}$=3.14159269205239
k= 14 PI_{CP}=3.14159265512088 $PI_{ВП}$=3.14159264790167 $PI_{ОП}$=3.14159266234009
k= 15 PI_{CP}=3.14159266022200 $PI_{ВП}$=3.14159265841720 $PI_{ОП}$=3.14159266202680
k= 16 PI_{CP}=3.14159264667482 $PI_{ВП}$=3.14159264622362 $PI_{ОП}$=3.14159264712602
k= 17 PI_{CP}=3.14159260771412 $PI_{ВП}$=3.14159260760132 $PI_{ОП}$=3.14159260782692
k= 18 PI_{CP}=3.14159291102427 $PI_{ВП}$=3.14159291099607 $PI_{ОП}$=3.14159291105247
k= 19 PI_{CP}=3.14159169670484 $PI_{ВП}$=3.14159169669779 $PI_{ОП}$=3.14159169671189
k= 20 PI_{CP}=3.14159655371011 $PI_{ВП}$=3.14159655370835 $PI_{ОП}$=3.14159655371187

Где n - максимальный желаемый порядок приближения к окружности
к - порядок приближения от 1 до n
$PI_{ВП}$ - вычисленное π для вписанного многоугольника с соответствующим порядком приближения - к
$PI_{ОП}$ - вычисленное π для описанного многоугольника
PI_{CP} - среднее значение между $PI_{ВП}$ и $PI_{ОП}$.

Анализируя результат вычисления (Таблица 1.), можно утверждать,что при увеличении порядка приближения, как и положено, $PI_{ВП}$ растет, а $PI_{ОП}$ уменьшается, приближаясь к истинному значению π . Но, к сожалению, с дальнейшим увеличением порядка прбличения асимптотического монотонного приближения к истинному значению π не наблюдается. При порядке приближения равном 15 $PI_{ВП}$ достигает максимума и затем начинает уменьшаться. Следует отметить что максимум выше известного и общепринятого значения π (отличие в 9 разряде после запятой). Откуда следует, что истинное значение π выше всеми принятого значения π.

$PI_{ОП}$ после 15 степени приближения продолжает понижаться асимтотически повторяя поведение $PI_{ВП}$, то есть линия асимтотического приближения $PI_{ВП}$ и $PI_{ОП}$ к истинному значению π не есть горизонтальная линия,как должно быть, а после 15 степени приближения наклоняется в меньшую сторону.

Объяснить такое поведение асимптоты можно лишь неточным вычислением ЕВМ квадратного корня (вычисленное значение которого постоянно завышено). Следует отметить, что точного вычисления квадратного корня от произвольного числа нет. Оно может быть или больше, или меньше действительного значения (ошибка округления).В этом и состоит проблемма вычисления численного значения π на ЕВМ.

Наличие максимума в поведении $PI_{ВП}$ в зависимости от степени приближения n можно объяснить следующим образом. Для этого выпишем формулу вычисления:

$$PI_{ВП} = 2^n \cdot \sqrt{\frac{1-A_n}{1+B_n}}\,. \qquad (15)$$

Из математических соображений ясно, что с увеличением степени приближения $PI_{ВП}$ должно расти. При наличии положительной ошибки в вычислении квадратного корня величины A_n и B_n приближаются к единице быстрее нормы (отсутствия ошибки), компенсируют прирост, а при дальнейшем увеличении степени приближения и превышют его (завал линии асимптоты).

Для доказательства выше сказанного был проделан следующий численный эксперимент: вычисление квадратного корня производилось не стандартным способом, а с помощью особых программ (программы прилагаются), в которой квадратный корень мог вычисляться с наперед заданной точностью (в пределах разрядности машины) с ошибкой от выбора в большую или в меньшую сторону (точный результат без ошибки получить невозможно).

Таблица 2..

PROGRAM Pi2bbdd

ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ: n

n= 20

		>	>
k= 1	$PI_{СР}$=3.41421356237310	$PI_{ВП}$=2.82842712474619	$PI_{ОП}$=4.00000000000000
k= 2	$PI_{СР}$=3.18758797895274	$PI_{ВП}$=3.06146745892072	$PI_{ОП}$=3.31370849898476
k= 3	$PI_{СР}$=3.15202151516629	$PI_{ВП}$=3.12144515225805	$PI_{ОП}$=3.18259787807453
k= 4	$PI_{СР}$=3.14413669898760	$PI_{ВП}$=3.13654849054594	$PI_{ОП}$=3.15172490742926
k= 5	$PI_{СР}$=3.14222477110033	$PI_{ВП}$=3.14033115695475	$PI_{ОП}$=3.14411838524591
k= 6	$PI_{СР}$=3.14175044043760	$PI_{ВП}$=3.14127725093276	$PI_{ОП}$=3.14222362994244
k= 7	$PI_{СР}$=3.14163208515662	$PI_{ВП}$=3.14151380114429	$PI_{ОП}$=3.14175036916895
k= 8	$PI_{СР}$=3.14160251053498	$PI_{ВП}$=3.14157294036694	$PI_{ОП}$=3.14163208070303
k= 9	$PI_{СР}$=3.14159511776778	$PI_{ВП}$=3.14158772527795	$PI_{ОП}$=3.14160251025760
k= 10	$PI_{СР}$=3.14159326962393	$PI_{ВП}$=3.14159142150474	$PI_{ОП}$=3.14159511774313
k= 11	$PI_{СР}$=3.14159280755609	$PI_{ВП}$=3.14159234552650	$PI_{ОП}$=3.14159326958569
k= 12	$PI_{СР}$=3.14159269183677	$PI_{ВП}$=3.14159257632938	$PI_{ОП}$=3.14159280734415
k= 13	$PI_{СР}$=3.14159266258264	$PI_{ВП}$=3.14159263370580	$PI_{ОП}$=3.14159269145949
k= 14	$PI_{СР}$=3.14159265749248	$PI_{ВП}$=3.14159265027326	$PI_{ОП}$=3.14159266471169
k= 15	$PI_{СР}$=3.14159266022200	$PI_{ВП}$=3.14159265841720	$PI_{ОП}$=3.14159266202680
k= 16	$PI_{СР}$=3.14159264667482	$PI_{ВП}$=3.14159264622362	$PI_{ОП}$=3.14159264712602
k= 17	$PI_{СР}$=3.14159245593213	$PI_{ВП}$=3.14159245581933	$PI_{ОП}$=3.14159245604493
k= 18	$PI_{СР}$=3.14159230389634	$PI_{ВП}$=3.14159230386814	$PI_{ОП}$=3.14159230392454
k= 19	$PI_{СР}$=3.14158926819145	$PI_{ВП}$=3.14158926818440	$PI_{ОП}$=3.14158926819850
k= 20	$PI_{СР}$=3.14158683966033	$PI_{ВП}$=3.14158683965857	$PI_{ОП}$=3.14158683966209

Как видно из таблицы 2.., $PI_{ВП}$ прочерчивает максимум также, как и при вычислени квадратного корня стандартным способом, а $PI_{ОП}$ после n=15 асимптотически приближается к $PI_{ВП}$

При ошибке вычисления квадратного корня в меньшую сторону линия асимтоты разворачивалась вверх, т.е. в зависимости от степени приближения n $PI_{ОП}$ прочерчивает минимум на n=15, а $PI_{ВП}$ после n=15 асимптотически приближается к $PI_{ОП}$ (Таблица 3).

Таблица 3.

PROGRAM Pi2mmdd

ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ: n

n= 20

		<	<
k= 1	PI_{CP}=3.41421356237310	$PI_{ВП}$=2.82842712474619	$PI_{ОП}$=4.00000000000000
k= 2	PI_{CP}=3.18758797895274	$PI_{ВП}$=3.06146745892072	$PI_{ОП}$=3.31370849898476
k= 3	PI_{CP}=3.15202151516629	$PI_{ВП}$=3.12144515225805	$PI_{ОП}$=3.18259787807453
k= 4	PI_{CP}=3.14413669898760	$PI_{ВП}$=3.13654849054594	$PI_{ОП}$=3.15172490742926
k= 5	PI_{CP}=3.14222477110033	$PI_{ВП}$=3.14033115695476	$PI_{ОП}$=3.14411838524591
k= 6	PI_{CP}=3.14175044043764	$PI_{ВП}$=3.14127725093280	$PI_{ОП}$=3.14222362994248
k= 7	PI_{CP}=3.14163208515676	$PI_{ВП}$=3.14151380114443	$PI_{ОП}$=3.14175036916910
k= 8	PI_{CP}=3.14160251053556	$PI_{ВП}$=3.14157294036752	$PI_{ОП}$=3.14163208070361
k= 9	PI_{CP}=3.14159511776778	$PI_{ВП}$=3.14158772527795	$PI_{ОП}$=3.14160251025760
k= 10	PI_{CP}=3.14159326963320	$PI_{ВП}$=3.14159142151400	$PI_{ОП}$=3.14159511775239
k= 11	PI_{CP}=3.14159280759315	$PI_{ВП}$=3.14159234556355	$PI_{ОП}$=3.14159326962274
k= 12	PI_{CP}=3.14159269213322	$PI_{ВП}$=3.14159257662583	$PI_{ОП}$=3.14159280764060
k= 13	PI_{CP}=3.14159266317554	$PI_{ВП}$=3.14159263429870	$PI_{ОП}$=3.14159269205239
k= 14	PI_{CP}=3.14159265749248	$PI_{ВП}$=3.14159265027326	$PI_{ОП}$=3.14159266471169
k= 15	PI_{CP}=3.14159266022200	$PI_{ВП}$=3.14159265841720	$PI_{ОП}$=3.14159266202680
k= 16	PI_{CP}=3.14159268462031	$PI_{ВП}$=3.14159268416911	$PI_{ОП}$=3.14159268507151
k= 17	PI_{CP}=3.14159260771412	$PI_{ВП}$=3.14159260760132	$PI_{ОП}$=3.14159260782692
k= 18	PI_{CP}=3.14159291102427	$PI_{ВП}$=3.14159291099607	$PI_{ОП}$=3.14159291105247
k= 19	PI_{CP}=3.14159169670484	$PI_{ВП}$=3.14159169669779	$PI_{ОП}$=3.14159169671189
k= 20	PI_{CP}=3.14159655371011	$PI_{ВП}$=3.14159655370835	$PI_{ОП}$=3.14159655371187

Разыгрывался и смешанный вариант, когда для $PI_{ВП}$ вычислялся квадратный корень с положительной ошибкой, а для $PI_{ОП}$ вычислялся квадратный корень с отрицательной ошибкой. При этом $PI_{ОП}$ в зависимости от степени приближения n в области n=15 прочерчивает минимум, а $PI_{ВП}$ прочерчивает максимум (Таблица 4).

Таблица 4.

PROGRAM Pi2bmdd

ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ: n

n= 20

\> <

k= 1 $PI_{СР}$=3.41421356237310 $PI_{ВП}$=2.82842712474619 $PI_{ОП}$=4.00000000000000

k= 2 $PI_{СР}$=3.18758797895274 $PI_{ВП}$=3.06146745892072 $PI_{ОП}$=3.31370849898476

k= 3 $PI_{СР}$=3.15202151516629 $PI_{ВП}$=3.12144515225805 $PI_{ОП}$=3.18259787807453

k= 4 $PI_{СР}$=3.14413669898760 $PI_{ВП}$=3.13654849054594 $PI_{ОП}$=3.15172490742926

k= 5 $PI_{СР}$=3.14222477110033 $PI_{ВП}$=3.14033115695475 $PI_{ОП}$=3.14411838524591

k= 6 $PI_{СР}$=3.14175044043762 $PI_{ВП}$=3.14127725093276 $PI_{ОП}$=3.14222362994248

k= 7 $PI_{СР}$=3.14163208515669 $PI_{ВП}$=3.14151380114429 $PI_{ОП}$=3.14175036916910

k= 8 $PI_{СР}$=3.14160251053527 $PI_{ВП}$=3.14157294036694 $PI_{ОП}$=3.14163208070361

k= 9 $PI_{СР}$=3.14159511776778 $PI_{ВП}$=3.14158772527795 $PI_{ОП}$=3.14160251025760

k= 10 $PI_{СР}$=3.14159326962856 $PI_{ВП}$=3.14159142150474 $PI_{ОП}$=3.14159511775239

k= 11 $PI_{СР}$=3.14159280757462 $PI_{ВП}$=3.14159234552650 $PI_{ОП}$=3.14159326962274

k= 12 $PI_{СР}$=3.14159269198499 $PI_{ВП}$=3.14159257632938 $PI_{ОП}$=3.14159280764060

k= 13 $PI_{СР}$=3.14159266287909 $PI_{ВП}$=3.14159263370580 $PI_{ОП}$=3.14159269205239

k= 14 $PI_{СР}$=3.14159265749248 $PI_{ВП}$=3.14159265027326 $PI_{ОП}$=3.14159266471169

k= 15 $PI_{СР}$=3.14159266022200 $PI_{ВП}$=3.14159265841720 $PI_{ОП}$=3.14159266202680

k= 16 $PI_{СР}$=3.14159266564757 $PI_{ВП}$=3.14159264622362 $PI_{ОП}$=3.14159268507151

k= 17 $PI_{СР}$=3.14159253182313 $PI_{ВП}$=3.14159245581933 $PI_{ОП}$=3.14159260782692

k= 18 $PI_{СР}$=3.14159260746031 $PI_{ВП}$=3.14159230386814 $PI_{ОП}$=3.14159291105247

k= 19 $PI_{СР}$=3.14159048244814 $PI_{ВП}$=3.14158926818440 $PI_{ОП}$=3.14159169671189

k= 20 $PI_{СР}$=3.14159169668522 $PI_{ВП}$=3.14158683965857 $PI_{ОП}$=3.14159655371187

Подчеркнуто - для $PI_{ВП}$ - максимум, к равно 15

для $PI_{ОП}$ - минимум, к равно 15.

Известное численное значение π не вписывается в зазор между минимумом и максимумом.

Также разыгрывался смешанный вариант, когда для $PI_{ВП}$ вычислялся квадратный корень с отрицательной ошибкой, а для $PI_{ОП}$ - с положительной ошибкой. При этом $PI_{ОП}$ и $PI_{ВП}$ в зависимости от степени приближения n в области n=15 пересекаются (Таблица 5).

Таблица 5.

PROGRAM Pi2mbdd

ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ: n

n= 20

< \>

k= 1 $PI_{СР}$=3.41421356237310 $PI_{ВП}$=2.82842712474619 $PI_{ОП}$=4.00000000000000

k= 2 $PI_{СР}$=3.18758797895274 $PI_{ВП}$=3.06146745892072 $PI_{ОП}$=3.31370849898476

k= 3 $PI_{СР}$=3.15202151516629 $PI_{ВП}$=3.12144515225805 $PI_{ОП}$=3.18259787807453
k= 4 $PI_{СР}$=3.14413669898760 $PI_{ВП}$=3.13654849054594 $PI_{ОП}$=3.15172490742926
k= 5 $PI_{СР}$=3.14222477110033 $PI_{ВП}$=3.14033115695476 $PI_{ОП}$=3.14411838524591
k= 6 $PI_{СР}$=3.14175044043762 $PI_{ВП}$=3.14127725093280 $PI_{ОП}$=3.14222362994244
k= 7 $PI_{СР}$=3.14163208515669 $PI_{ВП}$=3.14151380114443 $PI_{ОП}$=3.14175036916895
k= 8 $PI_{СР}$=3.14160251053527 $PI_{ВП}$=3.14157294036752 $PI_{ОП}$=3.14163208070303
k= 9 $PI_{СР}$=3.14159511776778 $PI_{ВП}$=3.14158772527795 $PI_{ОП}$=3.14160251025760
k= 10 $PI_{СР}$=3.14159326962856 $PI_{ВП}$=3.14159142151400 $PI_{ОП}$=3.14159511774313
k= 11 $PI_{СР}$=3.14159280757462 $PI_{ВП}$=3.14159234556355 $PI_{ОП}$=3.14159326958569
k= 12 $PI_{СР}$=3.14159269198499 $PI_{ВП}$=3.14159257662583 $PI_{ОП}$=3.14159280734415
k= 13 $PI_{СР}$=3.14159266287909 $PI_{ВП}$=3.14159263429870 $PI_{ОП}$=3.14159269145949
k= 14 $PI_{СР}$=3.14159265749248 $PI_{ВП}$=3.14159265027326 $PI_{ОП}$=3.14159266471169
k= 15 $PI_{СР}$=3.14159266022200 $PI_{ВП}$=3.14159265841720 $PI_{ОП}$=3.14159266202680
k= 16 $PI_{СР}$=3.14159266564757 $PI_{ВП}$=3.14159268416911 $PI_{ОП}$=3.14159264712602
k= 17 $PI_{СР}$=3.14159253182313 $PI_{ВП}$=3.14159260760132 $PI_{ОП}$=3.14159245604493
k= 18 $PI_{СР}$=3.14159260746031 $PI_{ВП}$=3.14159291099607 $PI_{ОП}$=3.14159230392454
k= 19 $PI_{СР}$=3.14159048244814 $PI_{ВП}$=3.14159169669779 $PI_{ОП}$=3.14158926819850
k= 20 $PI_{СР}$=3.14159169668522 $PI_{ВП}$=3.14159655370835 $PI_{ОП}$=3.14158683966209

К сожалению, нет такого варианта , когда бы $PI_{ВП}$ и $PI_{ОП}$ в зависимости от степени приближения выходили на горизонтальную асимтотическую линию. В этом состоит проблемма вычисления значения π в зависимости от степени приближения n на ЕВМ. Единственным выходом из этой проблеммы является вычисление истинного значения π из зазора между максимумом $PI_{ВП}$ и минимумом $PI_{ОП}$. Но для этого необходимо знать в каком соотношении находятся длины сторон описанного и вписанного многоугольников с длиной опирающейся дуги на эти стороны. Сведений об этом соотношении в литературе нет.

Выведем формулу для вычисления этого соотношения. Из Рис.3 следуют такие формулы для отрезков сторон треугольников и длин дуг:

$$b\_d/R=Tg(\alpha), \qquad a\_c/R=Sin(\alpha), \qquad a\_d/R=\alpha, \tag{49}$$

где b_d - отрезок стороны описанного многоугольника,
a_c - отрезок стороны вписанного многоугольника,
a_d - длина дуги окружности,
α - начальный угол.

Введем величину x, как долю разницы между вписанным и описанным отрезками, которую необходимо прибавить к отрезку стороны вписанного многоугольника , чтобы получить длину дуги окружности.

$$x\cdot(Tg(\pi/n) - Sin(\pi/n)) - Sin(\pi/n)=\pi/n, \tag{50}$$

где $\pi/n=\alpha$ - угол для любой степени приближения n.

Из (50) следует формула соотношения для любого угла:

$$x=\frac{\pi / n - Sin(\pi / n)}{Tg(\pi / n) - Sin(\pi / n)} \qquad (51)$$

При устремлении $n\rightarrow\infty$ x стремится к величине 1/3, т.е. при малых углах пропадает зависимость от π. С учетом выведенной формулы для соотношения между длинами сторон вписанного, описанного многоугольников и и длиной дуги, опирающейся на эти стороны, произведем вычисление истинного значения π в зазоре между максимумом $PI_{ВП}$ и минимумом $PI_{ОП,}$ которые находятся на 15 порядке приближения n . Распечатка результата вычислений с помощью программы на языке FORTRAN демонстрируется в таблице 6.

Таблица 6.

PROGRAM Pi2bmdd0

ВВЕДИТЕ ДАННЫЕ: n

n= 20

k= 1 PI=3.1415926535897930 $PI_{ВП}$=2.82842712474619 $PI_{ОП}$=4.00000000000000

k= 2 PI=3.1415926535897930 $PI_{ВП}$=3.06146745892072 $PI_{ОП}$=3.31370849898476

k= 3 PI=3.1415926535897930 $PI_{ВП}$=3.12144515225805 $PI_{ОП}$=3.18259787807453

k= 4 PI=3.1415926535897940 $PI_{ВП}$=3.13654849054594 $PI_{ОП}$=3.15172490742926

k= 5 PI=3.1415926535897940 $PI_{ВП}$=3.14033115695475 $PI_{ОП}$=3.14411838524591

k= 6 PI=3.1415926535897910 $PI_{ВП}$=3.14127725093276 $PI_{ОП}$=3.14222362994248

k= 7 PI=3.1415926535898260 $PI_{ВП}$=3.14151380114429 $PI_{ОП}$=3.14175036916910

k= 8 PI=3.1415926535898310 $PI_{ВП}$=3.14157294036694 $PI_{ОП}$=3.14163208070361

k= 9 PI=3.1415926535905840 $PI_{ВП}$=3.14158772527795 $PI_{ОП}$=3.14160251025760

k= 10 PI=3.1415926535864180 $PI_{ВП}$=3.14159142150474 $PI_{ОП}$=3.14159511775239

k= 11 PI=3.1415926535585240 $PI_{ВП}$=3.14159234552650 $PI_{ОП}$=3.14159326962274

k= 12 PI=3.1415926534331190 $PI_{ВП}$=3.14159257632938 $PI_{ОП}$=3.14159280764060

k= 13 PI=3.1415926531546590 $PI_{ВП}$=3.14159263370580 $PI_{ОП}$=3.14159269205239

k= 14 PI=3.1415926550860720 $PI_{ВП}$=3.14159265027326 $PI_{ОП}$=3.14159266471169

k= 15$PI_{ИС}$=3.1415926596203970$PI_{ВП}$=3.14159265841720$PI_{ОП}$=3.14159266202680

k= 16 PI=3.1415926591729100 $PI_{ВП}$=3.14159264622362 $PI_{ОП}$=3.14159268507151

k= 17 PI=3.1415925064886290 $PI_{ВП}$=3.14159245581933 $PI_{ОП}$=3.14159260782692

k= 18 PI=3.1415925062629160 $PI_{ВП}$=3.14159230386814 $PI_{ОП}$=3.14159291105247

k= 19 PI=3.1415900776680670 $PI_{ВП}$=3.14158926818440 $PI_{ОП}$=3.14159169671189

k= 20 PI=3.1415900776763340 $PI_{ВП}$=3.14158683965857 $PI_{ОП}$=3.14159655371187

Таким образом для 15 рязрядной ЕВМ на 15-ом порядке приближения n было вычисленно истинное значение π . Значение его таково:

$$\pi_{ист}=3.1415926596203970 \qquad (52)$$

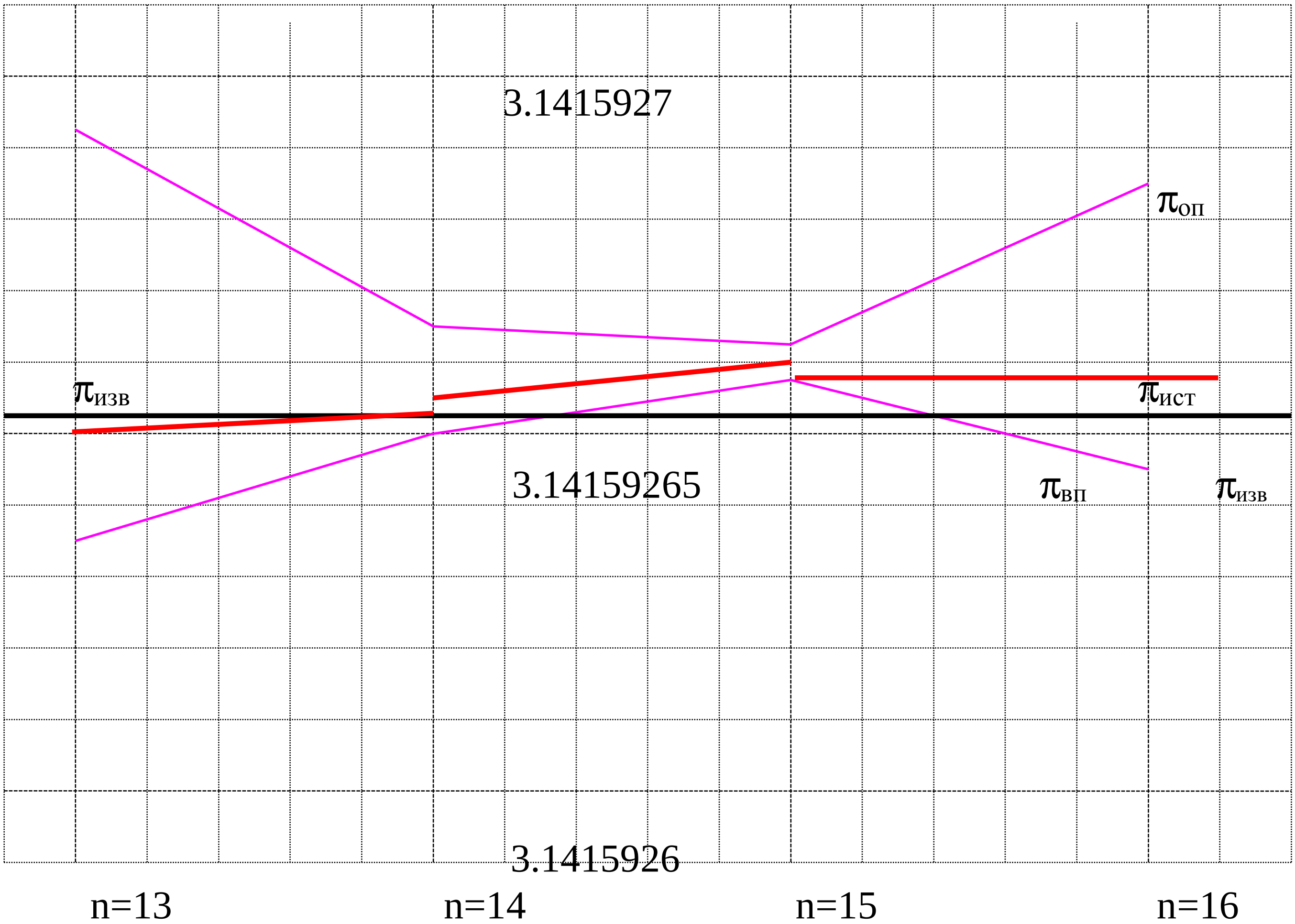
Остается только подтвердить этот результат (цифры в 9 и10 разрядах после запятой) на 32-х разрядной ЕВМ.

Также было вычислено значение π из разложения в ряд Фурье функции Arcsin(1/2)=π/6. Значение его таково:

$$\pi_{Sin}=3.141592653589794$$

И для сравнения выпишем известный результат полученный из INTERNET:

$$\pi_{изв}=3.1415926535897932...\quad.$$



Здесь на графике показано, как величина $\pi_{изв}$ - известное не вписывается в зазор между величинами $\pi_{вп}$ - вписанным и $\pi_{оп}$ - описанным (пятнадцатого порядка приближения), в котором находится величина истинного значеня $\pi_{ист}$.

Литература

1. И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев, Справочник по математике, 326, (1962).